Г.А.Медведев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Часть 2

Медведев Г.А. Математические основы финансовой экономики [Электронный ресурс]: Учебное пособие: Часть 2: Определение рыночной стоимости ценных бумаг. — Электрон. текст. дан. (3,5 Мб). — Мн.: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. — Режим доступа: http://anubis.bsu.by/publications/elresources/AppliedMathematics/medvedev3.pdf . — Электрон. версия печ. публикации, 2003. — PDF формат, версия 1.4 . — Систем. требования: Adobe Acrobat 5.0 и выше.

МИНСК

«Электронная книга БГУ»

2003

УДК 336.01:51(075.8)
ББК 65.261в6я73
М42

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра прикладной математики и экономической кибернетики
Белорусского государственного экономического университета
(зав. кафедрой д-р экон. наук, проф. *Н. И. Холод*);
д-р физ.-мат. наук, проф. *М. А. Маталыцкий*
(Гродненский государственный университет)

Медведев Г. А.
М42 Математические основы финансовой экономики: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 2: Определение рыночной стоимости ценных бумаг / Г. А. Медведев. – Мн.: БГУ, 2003. – 295 с.: ил.
ISBN 985-445-871-7 (ч. 2).

Излагаются основные разделы курсов «Математические основы финансовой экономики» и «Динамическая теория оценивания финансовых активов», касающиеся математических моделей определения рыночных цен финансовых активов и финансовых производных (дериватов) на основе свойств стохастических процессов, характеризующих изменение процентных ставок доходности на финансовом рынке.

Для студентов высших учебных заведений по специальности «Актуарная математика», а также для специалистов народного хозяйства, работающих в области финансов.

УДК 336.01:51(075.8)
ББК 65.261в6я73

ISBN 985-445-871-7 (ч. 2)
ISBN 985-445-870-9

ОТ АВТОРА

Настоящая книга является второй частью учебного пособия «Математические основы финансовой экономики». В первой части на основе мартингального подхода были рассмотрены математические проблемы, объясняющие, почему процессы на финансовом рынке описываются в непрерывном времени. На этой базе во второй части изучаются практические вопросы математического моделирования реальных рыночных котировок, принципы их описания и математические методы определения цен финансовых активов в обстановке стохастического поведения процентных ставок.

Пособие поможет студентам освоить курсы лекций «Математические основы финансовой экономики» и «Динамическая теория оценивания финансовых активов», обучение которым предусматривается учебным планом по специальности «Актуарная математика».

Поскольку на русском языке до сих пор мало учебников и других книг по стохастической финансовой математике, автор поставил перед собой цель познакомить студентов с достижениями в этой области в основном иностранных авторов. Литературные источники, на которых основано учебное пособие, приведены в библиографическом списке как основная литература. В список дополнительной литературы включены книги, помогающие понять математические детали учебного пособия, и статьи, в которых приводятся выводы или обобщения конкретных результатов.

Автор надеется, что учебное пособие будет полезно не только студентам, изучающим стохастические методы финансовой математики, но и специалистам, которым по роду своей работы необходимо анализировать финансовые решения.

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОДУ	–	обыкновенное дифференциальное уравнение
ПФМ	–	производящая функция моментов
СПР	–	составное пуассоновское распределение
УЧП	–	уравнение в частных производных
ФП	–	финансовая производная
ЦБ	–	ценная бумага
ADI	–	метод переменных направлений (*alternating direction implicit*)
BESQ	–	квадратичный процесс Бесселя (*Bessel squared*)
CAPM	–	модель определения цен активов, основанная на рассмотрении капитала (*Capital Asset Pricing Model*)
CIR	–	Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A., авторы модели CIR
CKLS	–	Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. B., авторы эмпирического исследования доходности ЦБ
HJM	–	Heath D., Jarrow R., Morton A., авторы модели HJM
MC	–	Medvedev G. A., Cox S. H., авторы модели MC
$\mathrm{cov}(X, Y)$	–	ковариация случайных величин X, Y
$E[X]$	–	математическое ожидание случайной величины (СВ) X
$E[X\|Y]$	–	условное математическое ожидание СВ X при фиксированном значении СВ Y
$M_X(t)$	–	ПФМ СВ X
$N(\mu, \sigma^2)$	–	нормальное (гауссово) распределение СВ с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2
P	–	исходная вероятностная мера
P^*, Q	–	эквивалентная мартингальная (нейтральная к риску) вероятностная мера
sh	–	гиперболический синус
$\mathrm{var}[X]$	–	дисперсия СВ X

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных задач, с которыми сталкиваются финансовые аналитики, – вычисление настоящих стоимостей различных потоков платежей. Независимо от того, насколько сложна модель потоков платежей, при детерминированных условиях на финансовом рынке это решается непосредственным применением техники дисконтирования. В реальном мире наличие стохастических процентных ставок значительно усложняет дело даже для простейших потоков платежей. В последнее время возникло много еще более сложных проблем в финансовой экономике в связи с необходимостью анализа финансовых производных. Данное пособие знакомит студентов с развитием математических методов, используемых для решения проблем в этом направлении. Основное внимание обращено на определение цен чисто дисконтных (бескупонных) облигаций (или эквивалентно временной структуры процентных ставок). Вместе с тем в некоторых случаях методы, лежащие в основе стохастического анализа, применяются к более сложным потокам платежей, порождаемым финансовыми производными (деривативами).

Результаты, полученные в минувшем столетии относительно временной структуры, выявили как практическую важность темы, так и ее академическую привлекательность. Временная структура в течение длительного периода рассматривалась участниками финансового рынка как отражающая экономические предчувствия будущих событий. Ряд исследований фиксировал связи между временной структурой и показателями экономической деятельности. В литературе по финансовой экономике много внимания уделяется оцениванию финансовых производных, относящихся к временной структуре. Эти ценные бумаги включают отзываемые облигации, форвардные и фьючерсные контракты и вложенные в них опционы. Большинство из контрактов могут быть декомпозированы на две составляющие: 1) собственно облигация и 2) различные опционы, неявно заложенные в контракты. Важно, что финансовые институты, предлагающие эти контракты, способны точно оценить цену инструментов для того, чтобы помочь уменьшить свою подверженность риску. В пособии определение стоимости опционов детально не обсуждается, однако для решения этой задачи знание изложенных математических методов необходимо.

В более ранней финансовой аналитической литературе считалось, что идентификация временной структуры может быть проведена только в рамках общей модели равновесия экономики. Однако в последнее время финансовыми аналитиками используются подходы, связанные с анализом условий отсутствия арбитража и определения стоимости активов в непрерывном времени. Поэтому внимание сосредоточивается именно на этом подходе к временной структуре. Результаты моделирования временной структуры в детерминированной постановке были описаны ранее (см. Г. А. Медведев, 1999, разд. 1.2), поэтому в настоящем пособии рассматриваются только стохастические постановки. Соотношения между арбитражным подходом и традиционными равновесными теориями временной структуры практически не затронуты, хотя некоторые сведения об этом можно найти в начале гл. 4. В любом случае арбитражные модели непрерывного времени отличаются от ранних теорий тем, что в них допускается возможность воспроизведения всех облигаций другими реализуемыми контрактами, а их цены – соответственно стоимостями этих контрактов.

Возникновение такого арбитражного подхода страдает, если так можно сказать, и своей «детской болезнью». Хотя в последнее время появилось много различных математических моделей временной структуры процентных ставок, однако любая из них слабо согласуется с реальной временной структурой. Это неудивительно, принимая во внимание природу и качество данных относительно временной структуры. Цены купонных и бескупонных облигаций, индексированные облигации вместе с опционами и фьючерсами на эти инструменты обеспечивают информацию относительно процентных ставок и должны быть совместимы с математической моделью, будучи использованными для оценки параметров модели или будучи совместимыми с предсказаниями (приспособленной) модели.

В многих работах, выполненных в этой области, описываются модели, которые *могли бы* использоваться, но не обосновывается, что их *нужно* использовать; часто возникает вопрос не относительно того, какую модель *нужно* использовать, а относительно того, какую *нельзя* использовать. Чтобы ответить на него, полезно иметь ясное представление о цели разработки модели, на которую практики могут положиться. Обычно участник рынка хотел бы иметь модель, которая является:

а) достаточно *гибкой*, чтобы охватить большинство ситуаций, возникающих на практике;

б) достаточно *простой*, чтобы было возможно получать решения в численном виде за приемлемое время;

в) *хорошо определенной*, в которой используются наблюдаемые данные или есть возможность оценивать входные данные;

г) *реалистичной*, которая не позволяла бы совершать нерациональные действия.

Кроме того, практик разделяет точку зрения эконометрика, который хотел бы

д) *хорошо приспособить* модель к эмпирическим данным,

а теоретик-экономист также потребовал бы

е) *равновесного получения* модели.

Для практика свойства а) – д) составляют недостижимую мечту.

Фундаментальный объект изучения временной структуры – процесс текущей процентной ставки, который является случайным процессом с непрерывным временем и непрерывными траекториями, хотя иногда также моделируется (более реалистично) со скачками. Текущая процентная ставка представляет собой мгновенную ставку безрискового возмещения в соответствующий момент времени, которая позволяет определить накопление денежной инвестиции от настоящего времени до некоторой будущей даты. Такое накопление вычисляется для детерминированного процесса процентной ставки. Если же принять, что процесс текущей процентной ставки является стохастическим процессом, проблема определения цены облигации становится нетривиальной.

Арбитражная теория определения цен предусматривает, что цена должна быть условным математическим ожиданием платежа в дату погашения, дисконтированного при процентной ставке, случайно изменяющейся в течение периода дисконтирования, начиная с текущей даты до даты погашения, с учетом того, как развивался процесс процентной ставки до текущей даты. Здесь проблемный вопрос заключается в том, что указанное математическое ожидание должно вычисляться по вероятностной мере, «нейтральной к риску». Таковой является мартингальная вероятностная мера, эквивалентная объективной вероятностной мере описания процессов на рынке. Следовательно, центральный вопрос – как моделировать закон изменения мгновенной ставки безрискового возмещения при нейтральной к риску мере с тем, чтобы достичь выполнения пунктов а) – е).

Математические проблемы, связанные с существованием эквивалентной мартингальной вероятностной меры и ее отношением к отсутствию арбитража на рынке, были предметом первой части настоящего пособия. Во второй части эти проблемы рассматриваются, отталкиваясь от рыночных котировок, точнее, от тех финансовых данных, которые может получить участник рынка непосредственно на рынке. Для проблемы определения цен финансовых активов такими данными являются так называемые *кривые доходности*, которые показывают, какие ставки доходности до погашения имеют свободные от неуплаты бескупонные (дисконтные) облигации различных сроков погашения. *Временная структура процентных ставок* – это, по существу, семейство кривых доходности для различных «текущих» дат. Проблема в том, что полученная на рынке временная структура процентных ставок является реализацией семейства случайных процессов и известна только для прошлых дат, а для определения цены актива необходимо знать временную структуру процентных ставок для будущего времени вплоть до даты погашения.

Построение математических моделей стохастического развития временной структуры процентных ставок, начиная с некоторого фиксированного времени, – предмет второй части пособия. Здесь будут представлены наиболее распространенные подходы построения математических моделей временных структур процентных ставок с необходимыми выводами и доказательствами. Одни из этих подходов стали уже классическими, а другие еще только разрабатываются. Как уже было сказано, математическая основа, используемая при разработке моделей временной структуры, изложена в первой части пособия, поэтому необходимые ссылки на эти результаты делаются на первую часть с указанием глав или параграфов.

ГЛАВА
1

КРИВЫЕ ДОХОДНОСТИ И ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

§ 1. КРИВАЯ ДОХОДНОСТИ И ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Кривая доходности – это совокупность доходностей свободных от риска неуплаты дисконтных (т. е. бескупонных) облигаций (*default risk-free discount bond*) в зависимости от различных сроков погашения (см. рис. 1.1). Кривые доходности определяют цены дисконтных облигаций, а также купонных облигаций, поскольку любая купонная облигация может быть заменена портфелем дисконтных облигаций. Чтобы оценить другие чувствительные к процентной ставке ценные бумаги (ЦБ), нужна модель того, как кривая доходности может развиваться во времени. Естественно, моделирование кривой доходности эквивалентно моделированию совокупности цен дисконтных облигаций или моделированию кривой форвардной ставки, и мы можем сосредоточить внимание на одном либо на другом в целях удобства.

Доходности и краткосрочные процентные ставки

Обозначим через t текущую дату и через $T > t$ дату, в которую облигация погашается, так что $T - t$ является временным сроком, обычно измеряемым в годах, остающимся до погашения. *Доходность* (*yield*) $y(t, T)$ облигации связана с ее *ценой* (*price*) $P(t, T)$ соотношениями

$$P(t, T) = \exp\{-y(t, T)(T-t)\} \Leftrightarrow y(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}. \qquad (1.1)$$

$P(t, T)$ обозначает в момент времени t цену облигации с номинальной стоимостью 1 денежная единица, погашаемой в дату T. В последующем номинальная стоимость всегда будет браться равной 1, так что это утверждение не будет повторяться. Ограничение «свобод-

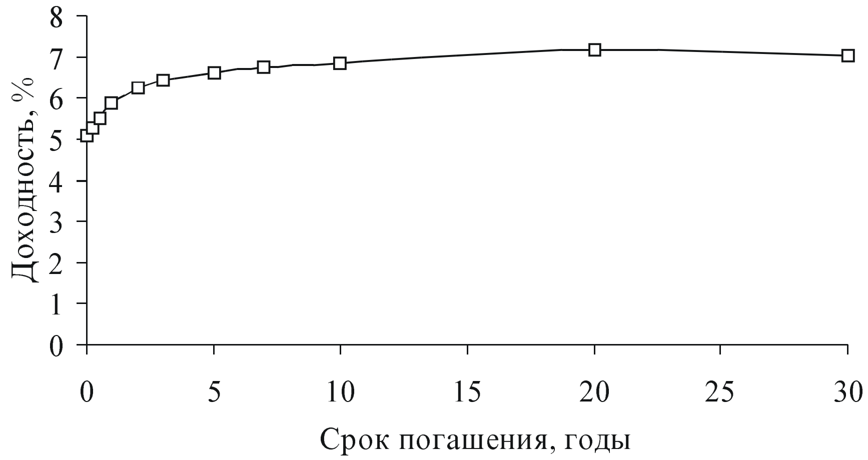

Рис. 1.1. Кривая доходности ценных бумаг Казначейства США на 20 сентября 1996 г. Маркеры соответствуют следующим срокам до погашения: 3 месяца, 6 месяцев, 1 год, 2 года, 3 года, 5 лет, 7 лет, 10 лет, 20 лет, 30 лет

ная от риска неуплаты» также не будет повторяться, так как риск неуплаты в этой главе не рассматривается.

Для целей моделирования удобно предположить, что существуют дисконтные облигации всех сроков погашения. В частности, предположим, что в каждый момент t имеется облигация, которая погашается в этот же момент времени, тогда ее доходность в этот момент времени $r(t) \equiv \lim_{T \downarrow t} y(t, T)$. Когда облигация погашается, ее номинальная стоимость всегда выплачивается. Поэтому эта краткосрочная облигация является безрисковой, и ее *процентная ставка дохода* (*rate of yield*) равна ее доходности. Процентная ставка дохода называется *краткосрочной* (или просто короткой, *short*) ставкой.

Таким образом, аналитический вид кривой доходности задается функцией $y(t, T)$, где дата погашения T считается аргументом, а текущая дата, или дата котировки доходностей t, является параметром кривой доходности. Часто эта функция записывается в виде $y(t, t + \tau)$, где $\tau = T - t$ меет смысл срока (времени) до погашения. На рис. 1.1 представлена кривая доходности для даты котировки 20 сентября 1996 г. *Временной структурой процентных ставок* называется совокупность кривых доходности для различных дат котировки. Иначе говоря, временная структура процентных ставок – это функция $y(t, T)$ от двух аргументов. Поэтому временная структура обобщает поведение кривых

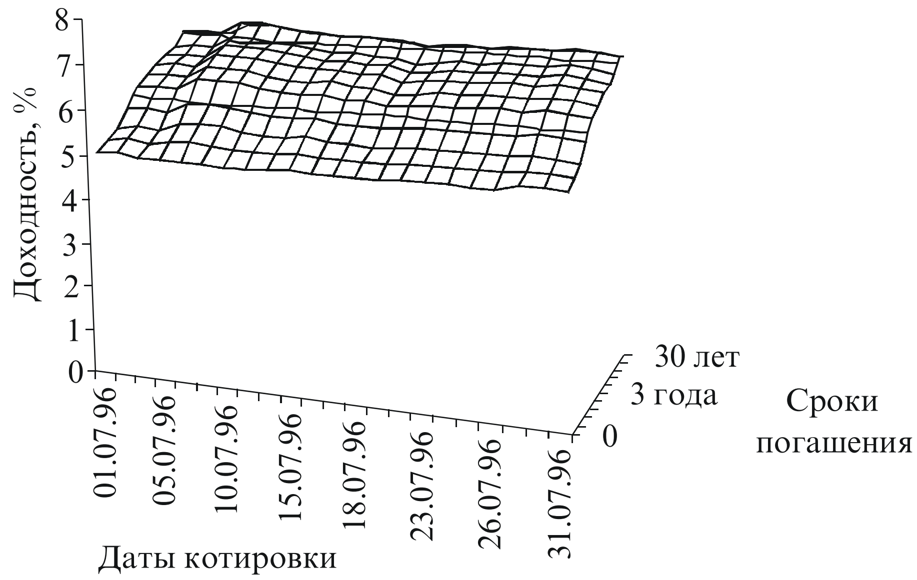

Рис. 1.2. Временная структура процентных ставок для ценных бумаг Казначейства США за июль 1996 г.

доходностей (рис. 1.2). Поскольку между функциями $y(t, T)$ и $P(t, T)$, определяемыми соотношениями (1.1), имеется взаимно однозначное соответствие, под временной структурой процентных ставок часто понимают функцию цены дисконтной облигации $P(t, T)$.

Модели непрерывного времени

В настоящей главе сделан обзор моделей кривой доходности непрерывного времени. В некоторых отношениях модели непрерывного времени более простые, чем модели дискретного времени, поскольку имеются аналитические методы, которые могут применяться к функциям непрерывного времени. Численное решение моделей непрерывного времени часто включает какую-либо дискретизацию времени. Однако решение дискретно-временной версии непрерывно-временной модели – не всегда эффективная процедура. Поэтому непрерывно-временные модели представляют значительный интерес, если даже необходимы численные решения. Недостаток непрерывно-временных моделей в том, что они требуют довольно абстрактных математических средств анализа.

Для удобства ниже даются сведения о математических методах стохастического анализа моделей непрерывного времени. Ключевыми результатами здесь являются формула Ито (так называемая «лемма Ито») и теорема Гирсанова.

Броуновское движение

Вначале объясним, что означает термин «броуновское движение». Он используется только для обозначения процесса *стандартного броуновского движения* или, что эквивалентно, *винеровского процесса*. Начнем с понятия о случайном блуждании.

Случайное блуждание – это случайный процесс дискретного времени, который изменяется скачками только на 1 единицу за каждую единицу дискретного времени $t = 1, 2,\ldots$ вверх или вниз с равными вероятностями. Состояние процесса случайного блуждания в момент t, которое обозначим $X(t)$, является суммой скачков до момента времени t включительно. Состояние зависит от «состояния среды» (т. е. случайное), хотя в обозначении $X(t)$ эта зависимость в явном виде не показывается. Такое случайное блуждание X имеет несколько важных свойств.

1. Случайное блуждание – это случайный марковский процесс: при заданной истории $(X(s), s \le t)$ состояние $X(t)$ является достаточной статистикой при прогнозе $X(u)$ для $u > t$, т. е. прошлое $(X(s), s < t)$ оказывается несущественным.

2. Случайное блуждание является мартингалом: математическое ожидание $X(u)$ при заданной истории $(X(s), s \le t)$ равно $X(t)$.

3. Квадратичная вариация (сумма квадратов приращений) в дату t равна t, что справедливо для всех возможных траекторий.

Эти свойства остаются в силе, если допустить изменения и в нецелые моменты времени, при условии что величина скачков равна квадратному корню времени между скачками (это необходимо для выполнения свойства 3).

Возможно, случайное блуждание – неплохой отправной пункт для построения модели цены актива (*ценной бумаги*, *security*). Конечно, можно использовать случайное блуждание как модель логарифма цены акции, а не самой цены акции, чтобы гарантировать неотрицательность цен, а также допускать, чтобы средние значения изменений были ненулевыми (например, считать положительные скачки более вероятными, чем отрицательные). Другая версия случайного блуждания, на которой мы сосредоточим внимание, основывается на предположении, что цены изменяются непрерывно, а не дискретно. Смысл этого предположения состоит в том, чтобы сделать модель более удобной для анализа. Для этого потребуем, чтобы она предусматривала следующие свойства.

1. Непрерывность траектории, т. е. функция $t \to X(t)$ непрерывна в каждом состоянии среды.

2. Стохастический процесс X является мартингалом.

3. Квадратическая вариация, которая будет определена ниже, для каждой даты t равна t.

Тогда распределение стохастического процесса X определяется единственным образом. Такой процесс называется *броуновским движением.*

Броуновское движение можно сконструировать путем предельного перехода в случайном блуждании, считая величины скачков равными плюс или минус квадратному корню времени между скачками при стремлении к нулю времени между скачками. На эвристическом уровне скачки броуновского движения можно считать равными $\pm\sqrt{dt}$ в каждом инфинитезимальном интервале dt (эта интерпретация в действительности может быть сделана математически строгой).

В дополнение к свойствам 1–3 броуновское движение является марковским процессом, и приращения $X(u) - X(t)$ для $u > t$ нормально распределены с дисперсией $u - t$. Это следует из свойств 1–3 случайного блуждания. Нормальность можно рассматривать как следствие центральной предельной теоремы, считая $X(u) - X(t)$ суммой независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями $\pm\sqrt{dt}$.

Свойство 3 броуновского движения кажется довольно специфичным, и как будто нет каких-либо особых причин принимать его для цен акций (или для логарифмов цен акций). Однако в действительности оно является только нормировкой. Любой другой непрерывный мартингал может быть преобразован в броуновское движение всего лишь путем деформирования временной шкалы. Можно также представить многие непрерывные мартингалы как стохастические интегралы относительно броуновских движений. Таким образом, так или иначе броуновское движение – основной строительный блок для непрерывных мартингалов.

Формула Ито

Интерес к мартингалам вызывает «фундаментальная теорема определения цен активов» (см. Dybvig, Ross, 1989). Согласно этой теореме, если отсутствуют арбитражные возможности, то нормированные соответствующим образом цены активов будут мартингалами при некоторой вероятностной мере. Нас интересует именно непрерывная модель вследствие упомянутого выше упрощения анализа. В частности, существует теория непрерывных мартингалов, основанная на стохастическом анализе, разработанном Ито. Основным средством этого анализа является формула дифференцирования, известная как *формула Ито*.

Квадратичный пример

Введем формулу Ито посредством стандартного примера. Пусть X будет некоторой функцией времени. Определим $Y(t) = X(t)^2$, считая Y сложной функцией, т. е. $Y(t) = f(X(t))$, где f – квадратичная функция. Рассмотрим дискретное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ временного интервала $[0, T]$. Мы можем написать

$$Y(t) = Y(0) + \sum_{i=1}^{N} \Delta Y(t_i),$$

где $\Delta Y(t_i) \equiv Y(t_i) - Y(t_{i-1})$.

Для любых вещественных чисел a и b

$$b^2 - a^2 = 2a(b - a) + (b - a)^2,$$

поэтому $\Delta Y(t_i) \equiv X(t_i)^2 - X(t_{i-1})^2 = 2X(t_{i-1})\Delta X(t_i) + [\Delta X(t_i)]^2$. Отсюда

$$Y(T) = Y(0) + 2\sum_{i=1}^{N} X(t_{i-1})\Delta X(t_i) + \sum_{i=1}^{N}[\Delta X(t_i)]^2. \tag{1.2}$$

Если перейти к пределу $N \to \infty$ так, чтобы $(t_i - t_{i-1}) \to 0$, тогда в пределе получим

$$Y(T) = Y(0) + 2\int_0^T X(t)dX(t) + \langle X, X\rangle(T), \tag{1.3}$$

где $\langle X, X\rangle(T)$ – «квадратическая вариация», упоминавшаяся ранее, и определяется как предел $\sum_{i=1}^{N}[\Delta X(t_i)]^2$ при $N \to \infty$.

Сравним полученную формулу с обычной формулой дифференцирования сложной функции. Если X непрерывно дифференцируемая функция времени, тогда по формуле дифференцирования сложной функции

$$dY(t) = f'(X(t))dX(t) = 2X(t)dX(t).$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим

$$Y(T) = Y(0) + \int_0^T dY(t) = Y(0) + 2\int_0^T X(t)\,dX(t). \qquad (1.4)$$

Разность между соотношениями (1.3) и (1.4), очевидно, состоит в наличии члена квадратической вариации в (1.3). Уравнение (1.3) является корректным даже для непрерывно дифференцируемых функций, поскольку квадратическая вариация непрерывно дифференцируемой функции равна нулю. Таким образом, соотношения (1.3) и (1.4) одинаковы для непрерывно дифференцируемой функции. Однако равенство (1.3) справедливо в более общем случае. Следует заметить, что предел, определяющий интеграл в выражении (1.3), может существовать только в вероятностном смысле, а X должен быть достаточно регулярным стохастическим процессом.

Подчеркнем, почему мы не ограничиваемся пространством непрерывно дифференцируемых функций, чтобы использовать обычный анализ. Причина в том, что не существует мартингалов с непрерывно дифференцируемыми траекториями, исключая тривиальный случай, когда процесс вырождается в константу. Как уже было замечено, нужно изучать мартингалы, если исследуются цены активов, так что нельзя предполагать непрерывную дифференцируемость, а нужно использовать более общую формулу (1.3).

Общая одномерная формула

Для квадратичной функции f формулу (1.3) можем написать как

$$Y(T) = Y(0) + \int_0^T f'[X(t)]dX(t) + \int_0^T \frac{1}{2} f''[X(t)]\;d\langle X, X\rangle(t), \qquad (1.5)$$

поскольку $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ и $\int_0^T d\langle X, X\rangle(t) = \langle X, X\rangle(T)$. Равенство (1.5) является общей формой формулы Ито для функции вещественной переменной X. Дифференциальная форма формулы Ито имеет вид

$$dY(t) = f'(X(t))\,dX(t) + f''(X(t))\,d\langle X, X\rangle(t)/2.$$

Интеграл Ито

Для того чтобы равенство (1.5) было справедливо, первый интеграл в нем должен быть определен специальным образом. Если X непрерывно дифференцируемо, не имеет значения, вычисляется ли предел суммы

$$\sum_{i=1}^{N} X(t_{i-1})\Delta X(t_i), \tag{1.6}$$

как в представлении (1.2), или вычисляется предел

$$\sum_{i=1}^{N} X(t_i)\Delta X(t_i). \tag{1.7}$$

Однако это имеет значение в общем случае. В формуле Ито выбран первый вариант суммирования $X(t)$ на левой границе каждого временного интервала $[t_{i-1}, t_i]$. В отличие от сумм (1.6) и (1.7), Р. Стратонович предложил среднюю точку (что приводит к интегралу Стратоновича). Кроме того, можно использовать правую границу, что приводит к интегралу Ито с задержкой. Однако только выбор К. Ито является подходящим для финансовых приложений. При замене интегрируемой функции в формуле (1.6) более общей функцией времени, скажем $\theta(t)$, сумму

$$\sum_{i=1}^{N} \theta(t_{i-1})\,\Delta X(t_i),$$

можно рассматривать как модель дохода от торговой стратегии, в которой θ обозначает число акций и ΔX – изменение цены. Использование левой границы t_{i-1} временного интервала и требование, чтобы $\theta(t_{i-1})$ зависело только от информации, имеющейся к моменту времени t_{i-1}, приводят к тому, что число акций, которые нужно держать перед изменением цены, становится известным. Очевидно, это является существенной характеристикой любой модели торговли ЦБ.

Многомерная формула

Формула Ито (1.5) применима и к n-мерным векторам $X = (X_1, \ldots, X_n)$, если интерпретировать ее элементы следующим образом:

$$f'(X(t))dX(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X(t))}{\partial X_i} dX_i(t)$$

и

$$f''(X(t))d\langle X, X\rangle(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial X_i \partial X_j} d\langle X_i, X_j\rangle,$$

где величина $\langle X_i, X_j\rangle$ определяется как предел суммы произведений $\Delta X(t_i)\Delta X(t_j)$. Для того чтобы применить формулу, нужно знать, как вычислять дифференциалы «процесса в угловых скобках». Используя тот факт, что процесс в угловых скобках определяется как предел сумм произведений дискретных изменений, обычно пишут

$$d\langle X_i, X_j\rangle = dX_i dX_j,$$

что сделаем и мы. «Правила умножения», которые используются здесь, следующие.

1. Если B – броуновское движение, тогда $dB(t)dB(t) = dt$ (поскольку квадратическая вариация до даты t равна t, как уже говорилось выше).

2. Вообще, если B_1 и B_2 – два броуновских движения, тогда произведение $dB_i(t)$ равно $dB_i(t)dB_j(t) = \rho_{ij}(t)dt$ для некоторой функции ρ, называемой «мгновенной корреляцией».

3. Для любого броуновского движения B выполняется равенство $dB(t)dt = 0$. Кроме того, $dtdt = 0$.

Теперь имеем все, чтобы при заданных броуновских движениях B_j вычислять «процесс угловых скобок» для любых процессов:

$$X_i(t) = \int_0^t \phi_i(s)ds + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \theta_{ij}(s)dB_j(s), \tag{1.8}$$

переходя к дифференциалам

$$dX_i(t) = \phi_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}(t)dB_j(t),$$

и применяя правила 1–3:

$$d\langle X_i, X_j\rangle = dX_i dX_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\theta_{ik}(t)\theta_{jl}(t)\rho_{kl}(t)dt.$$

Процессы вида (1.8) называются процессами Ито и являются достаточно общими, обычно встречающимися в моделях определения цен активов.

Функции времени

Частный случай общей формулы Ито, который часто встречается, получается, когда $Y(t) = f(t, Z(t))$, где Z является одномерным процессом. В этом случае в формуле для n-мерного случая $n = 2$, $X_1(t) = t$, $X_2(t) = Z(t)$ и тогда

$$dY(t) = \frac{\partial f(t, Z(t))}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t, Z(t))}{\partial Z}dZ(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, Z(t))}{\partial Z^2}d\langle Z, Z\rangle(t). \qquad (1.9)$$

Пример 1.1 (начисление процентов / дисконтирование платежа). Пусть $Y(t) = e^{\alpha t}Z(t)$ для константы α. Тогда $f(t, Z) = e^{\alpha t}Z$. Применение формулы Ито (1.9) дает

$$dY(t) = \alpha e^{\alpha t}Z(t)dt + e^{\alpha t}dZ(t),$$

что можно записать как

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \alpha dt + \frac{dZ(t)}{Z(t)}.$$

Заметим, что способ получения этого уравнения точно такой же, как и в обычном анализе.

Пример 1.2 (экспоненциальный мартингал). Рассмотрим процесс $Y(t) = e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B(t)}$ для константы σ, где B – броуновское движение. Тогда $f(t, B) = e^{-\sigma^2 t/2+\sigma B(t)}$ и формула Ито имеет вид

$$dY(t) = -\sigma^2 Y(t)\,dt/2 + \sigma Y(t)dB(t) + \sigma^2 Y(t)\,d\langle B, B\rangle(t)/2 =$$

$$= \sigma Y(t)dB(t). \qquad (1.10)$$

Таким образом,

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \sigma\, dB(t). \tag{1.11}$$

Если бы процесс B был непрерывно дифференцируемым, а не броуновским движением, тогда последнее слагаемое в правой части первого равенства (1.10) отсутствовало бы и, следовательно, не могло бы сократиться с первым слагаемым. Однако это сокращение приводит к тому, что Y становится мартингалом. Следовательно, для $u > t$ приращение $B(u) - B(t)$ имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией $u - t$. В результате получаются равенства

$$E[Y(u) - Y(t) \mid Y(t)] = E[e^{-\sigma^2 u/2 + \sigma B(u)} - e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B(t)} \mid B(t)] =$$

$$= e^{-\sigma^2 u/2 + \sigma B(t)} E[e^{\sigma(B(u) - B(t))} - e^{\sigma^2 (u-t)/2} \mid B(t)] = 0.$$

Таким образом, подтверждается уравнение (1.11), и его можно интерпретировать так: средняя скорость изменения Y равна нулю.

Теорема Гирсанова

Теорема Гирсанова является ключевым результатом для нейтрального к риску определения цены в непрерывном времени. Она показывает, как изменять дрейф процесса Ито с помощью изменения вероятностной меры.

Приведем эвристическое объяснение теоремы Гирсанова. Пусть λ является константой и B – винеровский процесс относительно исходной вероятностной меры P. Пусть $B^*(t) = B(t) + \lambda t$. Тогда B^* имеет дрейф (среднее изменение) λdt за инфинитезимальный интервал времени dt. Теорема Гирсанова показывает, как изменить дрейф B^* до нуля, т. е. как сделать B^* мартингалом. Напомним, что приращения dB на эмпирическом уровне строгости представляются в виде $\pm\sqrt{dt}$. Тогда $dB^* = \lambda dt \pm \sqrt{dt}$. Если мы изменим вероятность положительного приращения на $(1 - \lambda\sqrt{dt})/2$, а вероятность отрицательного приращения – на $(1 + \lambda\sqrt{dt})/2$, тогда среднее изменение процесса B^* будет равно

$$(1 - \lambda\sqrt{dt})(\lambda dt + \sqrt{dt})/2 + (1 + \lambda\sqrt{dt})(\lambda dt - \sqrt{dt})/2 = 0.$$

Следовательно, B^* – мартингал относительно этих скорректированных вероятностей.

До сих пор мы рассматривали только вероятности на отдельных «ветвях дерева» возможных траекторий. Вероятность отдельной траектории через все дерево является произведением вероятностей, ассоциированных с ветвями, составляющими траекторию. Пусть P^* обозначает скорректированные вероятности, а P – исходные вероятности (каждый скачок вверх или вниз происходит с вероятностью 1/2). Тогда будем иметь

$$\frac{P^*(\text{траектория за время } t)}{P(\text{траектория за время } t)} =$$

$$= \frac{P^*(\text{траектория за время } t-dt)}{P(\text{траектория за время } t-dt)} \times \frac{P^*(\text{переход в момент } t)}{P(\text{переход в момент } t)}.$$

Заметим, что для обеих ветвей (вверх или вниз)

$$\frac{P^*(\text{переход в момент } t)}{P(\text{переход в момент } t)} = 1 - \lambda dB(t).$$

Поэтому

$$\frac{P^*(\text{траектория за время } t)}{P(\text{траектория за время } t)} =$$

$$= \frac{P^*(\text{траектория за время } t-dt)}{P(\text{траектория за время } t-dt)} \times (1 - \lambda dB(t)).$$

Если обозначить через $Y(t)$ отношение вероятностей траекторий за время t, полученное выражение показывает, что относительное изменение Y в момент времени t равно $-\lambda dB(t)$, т. е.

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = -\lambda\, dB(t).$$

Решение этого уравнения (при $Y(0) = 1$) является экспоненциальным мартингалом

$$Y(t) = e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda B(t)}. \tag{1.12}$$

Из представленных выше эвристических рассуждений можно заключить, что процесс (1.12) определяет отношение вероятностей траекторий P^* к P такое, что B^* является мартингалом относительно P^*. Так как B^* непрерывен и его квадратическая вариация до каждой даты t равна t (заметим, что добавление λt к B не изменяет квадратическую вариацию B), B^* на самом деле должен быть броуновским движением относительно P^*. Кстати, это показывает, что существует не единственный способ задания броуновского движения через инфинитезимальные изменения. Здесь мы имеем два способа задания броуновского движения: приращения $\pm\sqrt{dt}$ с равными P-вероятностями и приращения $\lambda dt \pm\sqrt{dt}$ с P^*-вероятностями. Это и есть содержание теоремы Гирсанова. В формулировке теоремы нет ссылки на отношение вероятностей траекторий, поскольку индивидуальные траектории в действительности имеют нулевую вероятность по каждой из вероятностных мер P^* и P. Взамен в теореме утверждается, что B^* преобразуется в винеровский процесс с помощью умножения вероятности P любого события (семейства траекторий) на условное математическое ожидание Y, когда такое событие произошло.

Оказывается, нет никакой необходимости предполагать λ константой, если стохастический процесс λ является достаточно регулярным, чтобы общий вид процесса (1.12), т. е.

$$Y(t) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(u)du - \int_0^t \lambda(u)dB(u)\right\}, \tag{1.13}$$

был мартингалом. Заметим, что процесс (1.13) – всегда «локальный мартингал». Достаточное условие того, чтобы процесс (1.13) действительно был мартингалом, так называемое *условие Новикова*, записывается в форме

$$E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right\}\right] < \infty.$$

Теорема Гирсанова. Пусть ($B(t)$, $0 \le t \le T$) будет броуновским движением относительно вероятностной меры P и пусть λ будет стохастическим процессом таким, что процесс $Y(t)$, определяемый равенством (1.13), является мартингалом. Определим

$$B^*(t) = B(t) + \int_0^t \lambda(u)du$$

и новую вероятностную меру P^* конструктивно для любого события A соотношением

$$\frac{P^*(A)}{P(A)} = E[Y(T)|A].$$

Тогда процесс ($B^*(t)$, $0 \le t \le T$) является броуновским движением относительно вероятностной меры P^*.

§ 2. НЕЙТРАЛЬНОЕ К РИСКУ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН

При определении стоимости ЦБ очень удобно действовать, как будто все ожидаемые доходности равняются безрисковой ставке, что то же, когда все инвесторы нейтральны к риску. Это называется *принципом определения цен, нейтральным к риску*. Чтобы определить цены нейтрально к риску, нужно перейти к вероятностной мере, которая называется «нейтральной к риску вероятностной мерой». Нейтральная к риску вероятность существует, если на рынке не имеется никаких арбитражных возможностей, что, конечно, является очень слабым предположением и более резонным, чем предположение о том, что реальные инвесторы нейтральны к риску. Этот метод определения цен впервые был предложен Дж. Коксом и С. Россом (см. ч. 1, гл. 2, § 9). Если имеется неограниченное число возможных состояний среды, существование вероятности, нейтральной к риску, зависит от несколько более сильного предположения, чем обычное условие отсутствия арбитражных возможностей. Однако мы будем игнорировать этот факт и просто подразумевать более строгое предположение, когда утверждается, что «никакие арбитражные возможности не существуют». Вероятности, нейтральные к риску, тесно связаны с «ценами состояния».

Цены состояния и нейтральные к риску вероятности

Рассмотрим любые *финансовые производные* (ФП, *contingent claims*) и потоки платежей (*cash-flow stream*) как портфели ЦБ, которые называются «активами Эрроу» (*Arrow security*) в связи с тем, что они впервые были введены К. Эрроу (Arrow, 1964). По активам Эрроу выплачивается единица в особую дату, если особое событие встречается в эту дату, и выплачивается нуль во все другие даты и при всех других состояниях среды. Цены активов Эрроу называются «*ценами состояния*» (*state price*). При предположении об отсутствии арбитражных возможностей на рынке цена актива должна равняться сумме цен составных частей активов Эрроу. Это означает, что существует случайный процесс ρ (который определяет цены на единицу вероятности актива Эрроу) такой, что цена в дату 0 финансовой производной Y, по которой делается выплата в некоторую дату $t < T$, где T является заданным, равна $E[\rho(t)Y]$. Как обычно, мы явно не указываем зависимость потока платежей Y от состояния среды и не указываем подобную зависимость цены от состояния. Случайный процесс ρ называется «процессом плотности цены состояния». Термин «плотность» относится к тому факту, что ρ – цена на единицу вероятности, и является аналогией к значению слова «плотность» в статистике в выражении «функция плотности вероятностей» (которая означает вероятность на единицу меры Лебега).

Определим $\xi(T) \equiv \exp\left\{\int_0^T r(t)dt\right\}\rho(T)$, и для любого события A обозначим $P^*(A) = E[1_A\xi(T)]$, где 1_A – случайная величина, которая принимает значение 1, если в событие A включается истинное состояние среды, и значение 0 в других случаях.

Потребуем, чтобы P^* являлась нейтральной к риску вероятностью. Единственной проблемой, имеющей отношение к тому, что P^* – вероятность, которая не очевидна, будет ли P^*-вероятность достоверного события равна 1. Чтобы показать это, рассмотрим ФП Y, определяемую инвестированием одной денежной единицы при краткосрочной ставке в момент времени 0 и непрерывным прокручиванием инвестиции. Стоимость этой ФП в момент времени T

$$Y = \exp\left\{\int_0^T r(t)dt\right\} \equiv \frac{\xi(T)}{\rho(T)}.$$

Поскольку цена такого актива в момент времени 0 равна 1, мы должны иметь

$$1 = E[\rho(T)Y] = E[\xi(T)].$$

Из этого следует, что P^*-вероятность достоверного события равна 1, как и должно быть для вероятности. Чтобы показать, что P^* является *нейтральной к риску* вероятностью, необходимо, чтобы в дату 0 цена любой ФП Y, по которой делаются выплаты в дату $t \le T$, была равна математическому ожиданию стоимости Y, дисконтированной по краткосрочной процентной ставке прокрутки, т. е.

$$E^*\left[\exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}Y\right],$$

где E^* обозначает математическое ожидание по вероятностной мере P^*. Этот факт непосредственно следует из определения P^* через процесс плотности цены состояния ρ.

Цены дисконтной облигации

Ценой в дату t любой ФП, по которой выплачивается Y в любую дату $u \in [t, T]$, является математическое ожидание по нейтральной к риску вероятностной мере выплаты Y, дисконтированной при краткосрочной процентной ставке, т. е.

$$E_t^*\left[\exp\left\{-\int_t^u r(s)ds\right\}Y\right],$$

где E_t^* означает условное математическое ожидание по вероятностной мере P^* с учетом информации, имеющейся на момент времени t.

В частности, в момент времени t цена $P(t, u)$ дисконтной облигации с датой погашения u

$$P(t, u) = E_t^*\left[\exp\left\{-\int_t^u r(s)ds\right\}\right]. \tag{1.14}$$

Следовательно, модель кривой доходности должна быть моделью таких нейтральных к риску математических ожиданий.

Цена риска

Предположим, что по активу не выплачивается никаких дивидендов, и его цена X удовлетворяет соотношению

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t) \tag{1.15}$$

для некоторых стохастических процессов μ и σ и броуновского движения B. Например, если в уравнении (1.15) μ и σ – константы, тогда X является геометрическим броуновским движением. Процесс $\mu(t)$ интерпретируется как *средняя мгновенная ставка доходности*, а $\sigma(t)$ – как *стандартное отклонение мгновенной ставки доходности*.

Определим

$$\lambda(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}.$$

Процесс $\lambda(t)$ известен как «*цена риска*», поскольку рисковая премия $\mu(t) - r(t)$, являющаяся компенсацией за включение риска в актив, равна количеству риска $\sigma(t)$, умноженного на величину $\lambda(t)$, которую естественно интерпретировать как цену за единицу риска.

Цена риска тесно связана с нейтральной к риску вероятностью. Это следует из теоремы Гирсанова. Определив B^* так, как в утверждении теоремы Гирсанова, ставку доходности можно записать как

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dB^*(t) - \sigma(t)\lambda(t)dt = r(t)dt + \sigma(t)dB^*(t). \tag{1.16}$$

Когда процесс цены риска такой, что уравнение (1.13) определяет мартингал, процесс B^* является броуновским движением относительно вероятностной меры P^*, определенной в теореме Гирсанова. Таким образом, из уравнения (1.16) вытекает, что средняя ставка доходности по P^* для актива является безрисковой ставкой $r(t)$. Следовательно, мы имеем нейтральное к риску определение цены при P^*, т. е. P^* – нейтральная к риску вероятностная мера.

Мы можем соотнести нейтральную к риску вероятность и цену риска в терминах исходного броуновского движения B следующим образом: при нейтральной к риску вероятностной мере математическое ожидание $dB(t)$ равно $-\lambda(t)dt$.

В более общей постановке с ценами m активов X_i и n независимыми броуновскими движениями B_j можно написать m-вектор ставок доходности как $\mu(t) + \sigma(t)B(t)$, где $\mu(t)$ обозначает m-вектор математических ожиданий ставок доходности, B – n-вектор броуновских движений, а $\sigma(t)$ является $m\times n$-матрицей. В этом случае цена риска ассоциируется с каждым источником риска B_j. Процесс цены риска является n-вектором, определяемым из уравнения

$$\mu(t) - r(t) = \sigma(t)\lambda(t), \tag{1.17}$$

где $r(t)$ интерпретируется как m-вектор, каждый элемент которого равен краткосрочной процентной ставке.

Уравнение (1.17) можно интерпретировать так: рисковая премия каждого актива является суммой имеющихся рисков активов, умноженных на цены рисков.

Если арбитражные возможности отсутствуют, то по крайней мере одно решение λ уравнения (1.17) имеется. Кроме того, существует решение такое, что многомерный аналог (1.13), т. е.

$$Y(t) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \lambda_j^2(u)du - \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \lambda_j(u)dB_j(u)\right\},$$

является мартингалом. Этот процесс Y определяет нейтральную к риску вероятность так же, как в одномерном случае, рассмотренном выше. Если источников риска будет больше, чем имеется активов (более точно, если количество источников риска больше, чем линейно независимых строк матрицы σ), тогда может быть множество решений (1.17) и множество нейтральных к риску вероятностей. В этом случае имеются финансовые производные, которые не охватываются проведенным анализом, и, следовательно, их цены не могут быть определены путем арбитражных рассуждений.

Заметим, что дисперсии ставки доходности как при исходной, так и при нейтральной к риску вероятностной мере одинаковы. Только смысл их становится различным. Этот факт является важным при выборе портфеля или при вычислении стоимости при риске, поскольку такие операции делаются для исходной вероятностной меры.

Определение цен финансовых производных

Чтобы определить цену актива, стоимость которого зависит от других переменных X, необходимо вычислять математическое ожидание дисконтированной стоимости финансовой производной относительно нейтральной к риску вероятностной меры. Для этого нужно знать распределение X при нейтральной к риску вероятностной мере. Если X – цена рыночного актива, то ожидаемая мгновенная ставка – безрисковая ставка, так что нужно знать только дисперсию. В частности, нет необходимости знать цены рисков.

Ситуация меняется, если X не является ценой рыночного актива. Такой случай, в частности, будет, когда X – доходность облигации, например краткосрочная процентная ставка. В этом случае можно вывести среднее и дисперсию мгновенного изменения X при нейтральных к риску вероятностях из среднего и дисперсии при исходных вероятностях и цен рисков. Для определения цен можно игнорировать исходные вероятности и цены рисков и работать с распределением X при нейтральной к риску вероятностной мере. Если сделать предположение относительно распределения X при исходной вероятностной мере (например, для вычисления стоимости при риске), тогда неявно делаются предположения о ценах рисков.

Арбитражное и равновесное решения

Часто делают различие между арбитражным подходом к определению цены активов и равновесным подходом или между арбитражными моделями и равновесными моделями. Неверное понимание этого различия может привести к путанице.

Арбитражный подход к определению цен облигаций ввели в практику финансового анализа М. Бреннан и Е. Шварц (Brennan, Schwartz, 1977), Л. Дотан (Dothan, 1978), С. Ричард (Richard, 1978) и О. Васичек (Vasiček, 1977). Их результаты основаны на предположении, что рисковая премия является суммой действующих рисков, умноженных на цену риска. Как объяснялось выше, это справедливо, если отсутствуют арбитражные возможности. Существование цен рисков не только влечет отсутствие арбитража, но и гарантирует, что процесс Y, появляющийся в теореме Гирсанова, действительно мартингал. Таким образом, арбитражный подход может приводить к моделям, в которых действительно имеются арбитражные возможности. Эта точка зрения высказана Дж. Коксом, Дж. Ингерсоллом и С. Россом (Cox, Ingersoll, Ross (CIR), 1985) (см. гл. 4), которые разъясняют ситуацию несколько другим способом, чем здесь. В частности, они не ссылаются на теорему Гирсанова, а предлагают равновесную основу для класса моделей кривых доходности, придавая значение определению способностей и предпочтений участников рынка, которые, конкурируя на рынке, порождают предлагаемую модель кривых доходности. В равновесии не может быть арбитражных возможностей, так что в этом отношении подход CIR построен на более солидной основе, чем арбитражный.

Поэтому удобно просто принять отсутствие арбитражных возможностей. Действительно, это эквивалентно равновесному подходу, поскольку при равновесии отсутствуют арбитражные возможности, и, наоборот, если нет арбитражных возможностей, тогда модель является равновесной для некоторых способов конкретизации способностей и предпочтений инвесторов. Об этом говорится в упомянутой выше «фундаментальной теореме определения цен активов».

На эквивалентность этих предположений иногда не обращают внимания и сосредоточиваются на различии между равновесным и арбитражным подходами, сделанном Коксом, Ингерсоллом и Россом, не улавливая тонкого различия между арбитражным подходом и отсутствием арбитражных возможностей.

Как объяснялось выше, отсутствие арбитражных возможностей эквивалентно существованию нейтральной к риску вероятностной меры, так что равновесный подход к определению цен активов эквивалентен нейтральному к риску определению цен.

В литературных источниках делается различие между арбитражными и равновесными моделями, в которых термин «арбитражная модель» не относится ни к арбитражному подходу, ни к отсутствию арбитражных возможностей в том смысле, в каком он используется в этой главе. Такое различие началось со статьи Т. Хо и С. Ли (Ho, Lee, 1986), где авторы используют термин «свободный от арбитража» (*arbitrage-free*) для обозначения отсутствия арбитражных возможностей (эквивалентно равновесию) так же, как и предшествующие им авторы.

Вопреки использованию Хо и Ли термина «свободный от арбитража», некоторые последующие авторы идентифицировали его с моделью типа Хо – Ли, а именно с моделью, которая приспосабливается к реальной кривой доходности при построении модели. По существу, это означает, что «арбитражная модель» имеет большое число свободных параметров.

Следовало бы сказать, что различие между равновесными и арбитражными моделями не имеет большого значения, поскольку к любой модели можно добавить параметры так, чтобы можно было приспособить ее к текущей кривой доходности. Фактически это уже было продемонстрировано Коксом, Ингерсоллом и Россом в связи с их «равновесной моделью» и будет рассмотрено в § 3.

§ 3. ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Можно предположить, что кривая доходности определяется конечным числом переменных (факторов), и моделировать эволюцию этих переменных. Можно также непосредственно моделировать эволюцию всей кривой доходности целиком. Первый подход имеет очевидные преимущества в вычислительном отношении, хотя последний подход также популярен.

Используем принцип нейтрального к риску определения цен. Динамика процессов будет описываться относительно нейтральной к риску вероятностной меры. Для определенности каждое броуновское движение должно пониматься как броуновское движение относительно нейтральной к риску вероятностной меры. Поэтому в дальнейшем для краткости обозначим символом E математическое ожидание относительно нейтральной к риску вероятностной меры вместо символа E^*, применявшегося ранее.

Предположим, что существует конечное число n факторов и обозначим их символами $X_1, \ldots, X_n$. Пусть X будет вектор-столбцом $(X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$, состоящим из всех факторов.

Предположим, что X удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \qquad (1.18)$$

где $\mu(X(t))$ – n-мерный вектор; $\sigma(X(t))$ – $(n\times n)$-матрица; B – $(n\times 1)$-вектор независимых броуновских движений.

Интерпретировать уравнение (1.18) можно следующим образом: ожидаемое изменение X за единицу времени (*дрейф* X) равно $\mu(X(t))$, а матрица ковариаций процесса X за единицу времени (или *матрица волатильности*) равна $\sigma(X(t))\sigma(X(t))^{\mathrm{T}}$. Здесь и далее верхний индекс Т обозначает операцию транспонирования. Процесс X, определяемый уравнением (1.18), принадлежит к классу диффузионных процессов, которые являются марковскими.

Краткосрочная ставка в факторной модели

С точки зрения представления (1.14) кривая доходности определяется распределением краткосрочной ставки (при нейтральной к риску вероятностной мере). Пусть $r(t) = R(X(t))$ для некоторой функции R. Тогда динамика $r(t)$ и, следовательно, математические ожидания, выражающие цену дисконтной облигации формулой (1.14), аналитически выражаются через функции R, μ и σ.

Основное дифференциальное уравнение в частных производных

В факторных моделях цены дисконтных облигаций вычисляются только через факторы. Поэтому должна существовать такая функция цены p, чтобы в каждый момент времени t и для каждой даты погашения $u > t$ цена дисконтной облигации

$$P(t, u) = p(X(t), u - t).$$

Строгое доказательство существования функции $p(x, \tau)$ содержится в ч. 1 (гл. 5, § 3). Зафиксируем дату погашения u и предположим, что p достаточно регулярна, тогда можно определить динамику цены облигации с помощью формулы Ито. В результате получим

$$dP(t, u) = \frac{\partial p}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial X_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial X_i \partial X_j} d\left\langle X_i, X_j \right\rangle.$$

Это уравнение можно представить в более явной форме, если использовать правила для вычисления дифференциалов типа $d\left\langle X_i, X_j \right\rangle$, приведенные ранее, с учетом равенства (1.18). Для компактности удобно ввести n-вектор-строку $\frac{\partial p}{\partial X} = \left(\frac{\partial p}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial X_n} \right)$, $(n \times n)$-матрицу

$\dfrac{\partial^2 p}{\partial X^2}$ с элементами $\dfrac{\partial^2 p}{\partial X_i \partial X_j}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, и $\mathrm{tr}A$ – след матрицы A.

Тогда из равенства (1.18) и свойств $d\left\langle X_i, X_j \right\rangle$ следует, что

$$dP(t,\, u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\mu[X(t)] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma[X(t)]^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}\sigma[X(t)]\right)\right]dt +$$

$$+\ \frac{\partial p}{\partial X}\sigma[X(t)]dB(t).$$

Так как мы действуем в рамках нейтральной к риску вероятностной меры, дрейф должен быть равным $r(t)P(t,\, u) = r(t)p(X(t),\, u - t)$. Приравнивая дрейф к rp, получаем уравнение в частных производных (УЧП) относительно p, которое называется *основным* УЧП *для определения цены дисконтной облигации*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial X}\mu[X(t)] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma[X(t)]^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}\sigma[X(t)]\right)\Bigg] = r(t)\, p(X(t),\, u - t).$$

В литературе часто выводят основное УЧП, используя арбитражный подход, описанный ранее. Математическое ожидание (1.14) является решением основного УЧП и называется решением Фейнмана – Каца. Это непрямое доказательство (1.14) можно сделать более явным с помощью принципа нейтрального к риску определения цен, из которого получаем как формулу ожидания, так и основное УЧП. Можно находить цены облигаций с помощью вычисления математического ожидания или посредством решения УЧП. В зависимости от модели более легким будет либо первое, либо второе (то и другое будет продемонстрировано ниже).

Аффинные факторные модели

Большинство факторных моделей, рассмотренных в литературе, попадает в класс, называемый «аффинными факторными моделями». Факторная модель – аффинная, если R, μ и $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ являются аффинными (линейными плюс константа) функциями $X(t)$. Аффинная факторная модель имеет свойство, состоящее в том, что доходности – также аффинные функции вектора $X(t)$. Это означает, что существуют детерминированные функции времени, скажем, a и b (a – скалярная, а b – n-вектор), такие, что для каждых t и $\tau > 0$

$$y(t, t + \tau) = a(\tau) + b(\tau)^{\mathrm{T}} X(t). \tag{1.19}$$

Д. Даффи и Р. Кан показали (см. гл. 6), как вычислять функции аффинной структуры a и b через R, μ и σ.

Возникает вопрос, какими должны быть факторы. Одним из подходов может быть такой. Зафиксируем сроки до погашения $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и определим $Y_n(t) = y(t, t + \tau_n)$. Использование формулы (1.19) для каждой из дат погашения $t + \tau_n$ позволяет написать

$$Y(t) = A + BX(t), \tag{1.20}$$

где $Y(t)$ – вектор $(Y_1(t), \ldots, Y_n(t))^{\mathrm{T}}$; A – вектор $(a(\tau_1), \ldots, a(\tau_n))^{\mathrm{T}}$; B – матрица, составленная из вектор-строк $b(\tau_1)^{\mathrm{T}}, \ldots, b(\tau_n)^{\mathrm{T}}$.

В предположении, что B невырожденная, равенство (1.20) определяет взаимно однозначное соответствие между векторами $X(t)$ и $Y(t)$. Поэтому в качестве факторов можно принимать доходности для фиксированного времени до погашения.

Даффи и Кан показали, что произвольно определять R, μ и σ недопустимо, когда в качестве факторов принимаются доходности, так как нужно гарантировать выполнение равенства (1.20), если $X(t) = Y(t)$, т. е. $Y(t) = A + BY(t)$. Так как A и B определяются с помощью R, μ, σ, это требование налагает некоторые ограничения на R, μ и σ.

Доходностью, которая обычно включается в число переменных состояния, является краткосрочная процентная ставка. Это определяет R. Например, при выборе краткосрочной ставки в качестве первого фактора ($X_1(t) = r(t)$) следует, что $R(X(t)) = X_1(t)$. Поэтому для конкретизации модели остается определить μ и σ. В частности, однофакторные модели Васичека и CIR используют краткосрочную процентную ставку как единственный фактор. В аффинной однофакторной модели доходности получаем в виде

$$y(t, t + \tau) = a(\tau) + b(\tau) r(t) \tag{1.21}$$

для некоторых детерминированных функций a и b. Для моделей Васичека и CIR удается определить функции a и b в явном виде, как мы увидим ниже.

Для того чтобы $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ была аффинной функцией процесса $X(t)$ (который может быть или не быть вектором доходностей), каждая строка

σ должна состоять из величин, имеющих порядок квадратного корня из аффинной функции $X(t)$. Это объясняет популярность однофакторных моделей с постоянной волатильностью и волатильностью с квадратным корнем, впервые введенных Васичеком и CIR.

Хотя описанная постановка допускает в принципе произвольное число факторов, в применяемых на практике моделях обычно используется их небольшое число. Это отражает как желание компактно представить временную структуру, так и избежать трудностей при решении основного УЧП определения цены, которые появляются в многомерном случае. Поэтому сначала рассмотрим наиболее популярные однофакторные модели, а затем перейдем к описанию многофакторных (в основном двухфакторных) моделей, встречающихся в литературе.

В однофакторных моделях, как правило, предполагается, что единственным фактором является безрисковая процентная ставка r, относительно которой обычно считается, что она следует диффузионному процессу, удовлетворяющему уравнению (1.18) со следующей конкретизацией параметров: $n = 1$, $X(t) = r(t)$, $\mu(X(t), t) = k\{\theta(t) - r(t)\}$, $\sigma(X(t)) = \sigma r(t)^{\beta}$, т. е.

$$dr(t) = k\{\theta(t) - r(t)\}dt + \sigma r(t)^{\beta} dB(t).$$

Здесь $\theta(t)$ – детерминированная функция t, а $k \geq 0$, $\sigma > 0$ и $\beta \geq 0$ являются константами. Семейство таких моделей, в частности, включает: при $\beta = 0$ обобщенную модель Васичека (мы используем термин «обобщенная», чтобы показать, что параметр дрейфа $\theta(t)$ зависит от времени таким образом, чтобы приспособить модель к исходной временной структуре, как предложили Дж. Халл и А. Уайт (Hull, White, 1990), а также непрерывно-временную версию модели Хо – Ли (1986), когда $k = 0$); для $\beta = 1/2$ – модель CIR; для $\beta = 1$ модель М. Бреннана и Е. Шварца (Brennan, Schwartz, 1977). Заметим, что для $\beta \in (0, 1/2)$ решение уравнения не является единственным (см., например, Arnold, 1973, с. 124), поэтому этот случай рассматривать не имеет смысла. Вместе с тем уместно отметить, что при эмпирическом изучении данных доходности ценных бумаг Казначейства США К. Чен, Г. Каролай, Ф. Лонгстаф и А. Сандерс (Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders (CKLS), 1992) получили оценку $\beta = 1{,}5$.

Существуют, конечно, и другие подходы к построению однофакторных моделей. Однако, как правило, они не позволяют получить решение в аналитической форме. В завершение описания частных случаев приведем модели Ф. Блэка и П. Карасинского (Black, Karasinsky, 1991), а также К. Сандманна и В. Зондерманна (Sandmann, Sondermann, 1993), в которых диффузионные процессы краткосрочных ставок определяются соответственно стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dr(t) = r(t)\,[\theta(t) - k\ln r(t) + \sigma^2/2]dt + r(t)\sigma dB(t),$$

$$dr(t) = (1 - e^{-r(t)})\{[\theta(t) - (1 - e^{-r(t)})\sigma^2]dt + \sigma dB(t)\}.$$

Заметим, что краткосрочные процентные ставки, определяемые этими уравнениями, имеют логнормальное распределение.

Модель Васичека

О. Васичек (Vasiček, 1977) исследовал однофакторную модель, в которой краткосрочная процентная ставка, единственный фактор, удовлетворяет уравнению

$$dr(t) = k\{\theta - r(t)\}dt + \sigma dB(t), \tag{1.22}$$

где k, θ и σ – положительные константы; B – процесс броуновского движения.

Процесс r относится к классу процессов Орнштейна – Уленбека. Функция дрейфа всегда подталкивает краткосрочную ставку к уровню θ, который является установившимся средним (*long-run mean*) процесса. Параметр k определяет скорость установления среднего.

С помощью формулы Ито можно проверить, что

$$r(u) = \theta - e^{-k(u-t)}\{\theta - r(t)\} + \sigma\int_t^u e^{-k(u-s)}dB(s)$$

для любых моментов времени $u > t$. Отсюда, ограничиваясь информацией в момент времени t, можно вывести, что интеграл $\int_t^{t+\tau} r(u)du$ для каждого $\tau > 0$ является нормально распределенной случайной величиной со средним значением

$$m(r(t), \tau) = \theta\tau - (1 - e^{-k\tau})\{\theta - r(t)\}/k$$

и дисперсией

$$v(\tau) = \sigma^2(4e^{-k\tau} - e^{-2k\tau} + 2k\tau - 3).$$

Этот результат позволяет определять цены дисконтных облигаций путем вычисления математического ожидания (1.14), так как формула для математического ожидания экспоненты нормально распределенной случайной величины может рассматриваться как ПФМ нормального распределения. Результатом является выражение

$$P(t, t + \tau) = \exp\{- m(r(t), \tau) + v(\tau)/2\}.$$

Из этой формулы можно легко определить функции a и b в выражении (1.21).

Подробное описание модели Васичека и ее анализ содержатся в разделе 2.1 пособия Г. Медведева (1999). Цены для опционов дисконтной облигации даны Ф. Джамшидианом (Jamshidian, 1989). Формула определения цены опционов похожа на формулу Блэка – Шоулса, так как цены дисконтированной облигации в модели Васичека распределены логарифмически нормально, как и в модели Блэка – Шоулса. Преимущество модели Васичека – в ее простоте, а недостаток заключается в том, что доходности оказываются нормально распределенными, т. е. с положительной вероятностью могут быть отрицательными.

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR)

Дж. Кокс, Дж. Ингерсолл и С. Росс (Cox, Ingersoll, Ross, 1985) ввели однофакторную модель, в которой краткосрочная ставка удовлетворяет уравнению

$$dr(t) = k\{\theta - r(t)\}dt + \sigma\sqrt{r(t)}\, dB(t), \tag{1.23}$$

где k, θ и σ – положительные константы, а B – процесс броуновского движения.

Процесс $r(t)$, определяемый уравнением (1.23), часто называется *диффузией с квадратным корнем* (*square-root diffusion*). Как и в модели Васичека, этот процесс краткосрочной ставки имеет установившееся среднее θ. Отличие от модели Васичека в том, что волатильность пропорциональна квадратному корню из краткосрочной ставки, а не является константой.

Эта модель более сложная, чем модель Васичека. Подробный ее анализ содержится в гл. 4. Свойства процесса (1.23), которому следует краткосрочная ставка модели CIR, были исследованы ранее В. Феллером (1951). Преимущество модели в том, что краткосрочная ставка никогда не может быть отрицательной. На интуитивном уровне строгости это объясняется тем, что волатильность $\sigma^2 r(t)$ становится очень маленькой, когда ставка $r(t)$ близка к нулю, так что роль дрейфа будет доминировать в изменении процесса $r(t)$, и он будет подталкивать процесс $r(t)$ к уровню θ.

Следующее преобразование r, предложенное Х. Бюльманом, приводит к хорошо изученному процессу. Определим функцию $h(t)$ равенством $h(t) = \sigma^2(e^{k\tau} - 1)/4k$, и пусть h^{-1} обозначает обратную функцию. Цель этой громоздкой конструкции – облегчение последующего сравнения с моделью, имеющей изменяющиеся во времени коэффициенты. Здесь, конечно, можно выписать обратную функцию в явной форме как $h^{-1}(u) = \ln\{1 + 4ku/\sigma^2\}/k$. Определим

$$\tilde{r}(u) = \exp\{kh^{-1}(u)\} r(h^{-1}(u)).$$

Можно показать, что

$$d\tilde{r}(u) = \delta du + 2\sqrt{\tilde{r}(u)}\, dZ(u) \tag{1.24}$$

для броуновского движения Z, где δ определяется как $4k\theta/\sigma^2$. Процесс $\tilde{r}$ принадлежит классу BESQ^δ – квадратичных бесселевых процессов (*Bessel squared*) степени δ. Параметр δ определяет, может ли процесс r достигать нуля. Если $\delta \geq 2$, то с вероятностью единица процесс r всегда строго положителен; в то время как если $\delta < 2$, то с положительной вероятностью процесс r иногда попадает в нуль, но никогда не становится отрицательным. В частном (очень редком) случае, когда δ является целым, квадрат длины δ-мерного вектора независимых процессов броуновских движений является процессом, удовлетворяющим уравнению (1.24). По этой причине процесс процентной ставки CIR иногда называют «квадратичной гауссовой моделью».

Функции a и b в выражении (1.21) могут быть определены с помощью подстановки (1.21) в основное УЧП. При единственном факторе r удобно обозначить первую и вторую частные производные по переменной r функции $p(r, u - t)$ как p_r и p_{rr}, где u обозначает фиксированную дату погашения. Применение формулы Ито показывает, что математическое ожидание темпа изменения цены облигации равно

$$\{p_t + k(\theta - r)p_r + \sigma^2 r p_{rr}/2\}/p.$$

Приравнивая это к безрисковой ставке r, получаем основное УЧП для определения цены дисконтной облигации:

$$rp = p_t + k(\theta - r)p_r + \sigma^2 r p_{rr}/2.$$

Здесь частная производная по времени p_t равна минус производной p по второму аргументу $\tau = u - t$ (время до погашения). Это приводит к виду

$$rp = -p_\tau + k(\theta - r)p_r + \sigma^2 r p_{rr}/2.$$

Определим $\alpha(\tau) = \tau a(\tau)$ и $\beta(\tau) = \tau b(\tau)$. Из аффинной формулы (1.21) для доходности следует, что

$$P(r, \tau) = \exp\{-\alpha(\tau) - \beta(\tau)r\}. \tag{1.25}$$

Для того чтобы гарантировать равенство $P(r, 0) = 1$, необходимо иметь $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Легко проверить, что функция (1.25) удовлетворяет основному УЧП, если и только если

$$\beta'(\tau) = 1 - k\beta(\tau) - \sigma^2\beta^2(\tau)/2, \tag{1.26}$$

$$\alpha'(\tau) = k\theta\beta(\tau), \tag{1.27}$$

где штрих обозначает производную.

Уравнение (1.26) является уравнением типа Риккати и имеет решение

$$\beta(\tau) = 2(e^{\gamma\tau} - 1)/c(\tau),$$

где $c(\tau) = (k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma$ и $\gamma = (k^2 + \gamma^2)^{1/2}$. Тогда интегрирование уравнения (1.27) дает

$$\alpha(\tau) = \frac{-2k\theta}{\sigma^2}\left(\frac{(k+\gamma)\tau}{2} + \ln\frac{2\gamma}{c(\tau)}\right).$$

CIR также дают формулу для цены опциона на дисконтированную облигацию.

Модель MC

Модели CIR и Васичека являются частными случаями более общей модели MC (Medvedev, Cox, 1996), для которой отрегулированный риском дрейф $\mu(r, t)$ и квадрат волатильности $\sigma(r, t)^2$ явно не зависят от времени (что относит ее к классу моделей, однородных по времени (*time homogeneous model*)), а также являются линейными функциями краткосрочной процентной ставки (что обеспечивает аффинность модели). То есть

$$\mu(r, t) = \alpha r + \beta, \quad \sigma(r, t)^2 = \gamma r + \delta,$$

где α, β, γ и δ – константы, которые удовлетворяют определенным ограничениям.

Перечислим вкратце эти ограничения. Для того чтобы процесс краткосрочной процентной ставки был устойчивым (т. е. дисперсия процесса со временем не увеличивалась неограниченно, а устанавливалась на некотором уровне), необходимо, чтобы $\alpha < 0$. При этом среднее значение краткосрочной процентной ставки будет устанавливаться к уровню $-\beta/\alpha$, когда $t \to \infty$. Из определения также вытекает необходимое условие $\sigma(r, t)^2 = \gamma r + \delta \geq 0$. Смысл его состоит в следующем. Сделаем естественные предположения, что исходное значение краткосрочной процентной ставки $r(0)$ было таким, чтобы это условие выполнялось, $\gamma r + \delta \geq 0$, и что это неравенство выполняется строго при установившемся значении краткосрочной процентной ставки $r = -\beta/\alpha$, т. е. $\delta \ -\beta\gamma/\alpha > 0$. Тогда из свойств стохастического уравнения (1.18) следует, что в будущем это условие будет удовлетворяться всегда. Физически значение ставки $r = -\delta/\gamma$ является отражающей границей процесса краткосрочной процентной ставки. Когда процесс $r(t)$ достигает этого уровня, мгновенная волатильность процесса $\sigma(r, t)$ обращается в нуль, процесс $r(t)$ перестает быть стохастическим и начинает детерминированно изменяться в сторону своего уровня установления, т. е. удаляется от этой границы внутрь области, где выполняется условие $\gamma r + \delta > 0$.

Модель MC превращается в модель Васичека, когда

$$\mu(r, t) = \alpha r + \beta = k(\theta - r), \text{ т. е. } \alpha = -k, \ \beta = k\theta;$$
$$\sigma(r, t)^2 = \gamma r + \delta = \sigma^2, \text{ т. е. } \gamma = 0, \ \delta = \sigma^2.$$

Заметим, что в модели Васичека отражающая граница процесса краткосрочной процентной ставки удаляется к $-\infty$.

Модель MC превращается в CIR модель, когда

$$\mu(r, t) = \alpha r + \beta = k(\theta - r), \text{ т. е. } \alpha = -k, \ \beta = k\theta;$$
$$\sigma(r, t)^2 = \gamma r + \delta = \sigma^2 r, \text{ т. е. } \gamma = \sigma^2, \ \delta = 0.$$

В модели CIR отражающей границей процесса краткосрочной процентной ставки является $r = -\delta/\gamma = 0$.

Для модели МС функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ имеют следующий вид:

$$b(\tau) = \frac{2(e^{\varepsilon\tau} - 1)}{2\varepsilon + \vartheta(e^{\varepsilon\tau} - 1)}, \quad \varepsilon = \sqrt{\alpha^2 + 2\gamma},$$

$$a(\tau) = \frac{\delta}{\gamma}\left(\tau - b(\tau)\right) + \frac{\omega}{\gamma^2}\left[\alpha\tau - \ln\left(\frac{db(\tau)}{d\tau}\right)\right].$$

В этих соотношениях для компактности использованы обозначения $\omega = \alpha\delta - \beta\gamma$, $\vartheta = \varepsilon - \alpha$. Под знаком логарифма здесь для краткости поставлена производная функции $b(t)$, так как она в явной форме выписывается через $b(t)$ из первого уравнения. Функция $b(t)$ для модели МС имеет тот же вид, что и в модели CIR, так как $\alpha = -k$.

Поскольку рассмотренные выше однофакторные модели процессов краткосрочной процентной ставки отличаются тем, что в них процесс краткосрочной ставки $r(t)$ имеет тенденцию изменяться около установившегося среднего значения θ, эти процессы иногда называют процессами, возвращающимися к среднему (*mean-reverting process*). Подробный сравнительный анализ моделей Васичека, CIR и МС содержится в гл. 5.

Модель Васичека с переменными коэффициентами

Если α, β, σ : $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ – произвольные локально ограниченные функции, тогда стохастическое дифференциальное уравнение

$$dr_t = \sigma_t dW_t + (\alpha_t - \beta_t r_t)dt \tag{1.28}$$

для r имеет единственное решение, которое является гауссовым процессом. Эта модель рассмотрена Дж. Халлом и А. Уайтом (Hull, White, 1990), обобщившими модель Васичека, в которой функции α, β, σ были константами, и Мертона, в которой принято $\beta = 0$.

Анализ уравнения (1.28) проводится достаточно просто. Обозначим $K_t \equiv \int_0^t \beta_u du$ и умножим уравнение (1.28) на $\exp(K_t)$. Тогда получим

$$d[e^{K_t} r_t] = e^{K_t}(\sigma_t dW_t + \alpha_t dt),$$

откуда

$$r_t = e^{-K_t}\left\{r_0 + \int_0^t e^{K_u}\left(\sigma_u dW_u + \alpha_u du\right)\right\}.$$

Это является гауссовым процессом, для которого

$$\mu_t \equiv Er_t = e^{-K_t}\left\{r_0 + \int_0^t e^{K_u}\alpha_u du\right\},$$

$$\rho \equiv \operatorname{cov}(r_s, r_t) = e^{-K_s - K_t}\int_0^{s\wedge t} e^{2K_u}\sigma_u^2 du.$$

Таким образом, $Z_t \equiv \int_0^t r_u du$ нормально распределен с $N(m_t, v_t)$, где

$$m_t \equiv \int_0^t e^{-K_s}\left\{r_0 + \int_0^s e^{K_u}\alpha_u du\right\}ds, \quad v_t \equiv 2\int_0^t ds\int_0^s dy\int_0^y du\; e^{2K_u - K_s - K_y}\sigma_u^2,$$

и, следовательно, цена облигации

$$E\exp\left[-\int_0^t r_u du\right] = \exp\left(-m_t + \frac{1}{2}v_t\right) = \tag{1.29}$$

$$= \exp[-r_0 B(0, t) - A(0, t)], \tag{1.30}$$

где для $0 \le t \le T$

$$B(t, T) \equiv \int_t^T \exp\left(-K_u + K_t\right)du_t; \tag{1.31}$$

$$A(t, T) \equiv \int_t^T du\int_t^u ds\left\{\alpha_s e^{K_s - K_u} - \int_t^s dy\sigma_y^2 e^{-K_s - K_u + 2K_y}\right\}.$$

Таким образом, модель Халла – Уайта крайне *простая*, и логарифмически нормальное распределение цен облигаций приводит к несложному способу определения цены ФП ЦБ. Например, цена в момент t европейского опциона-колл, который истекает в момент времени T с ценой исполнения X, на дисконтную облигацию с датой погашения $T' \ge T$ равна

$$E\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)[\exp\{-r_T B(T,T') - A(T,T')\} - X]^+ \middle| F_t\right],$$

что можно вычислить в явной форме. Аналогично стоимость в момент времени t фьючерсного контракта с датой доставки T на дисконтную облигацию с датой погашения $T' > T$ выражается в форме, которая также допускает вычисление в явном виде:

$$E\,[P(T, T') \mid F_t] = E[\exp\{-r_T B(T, T') - A(T, T')\} \mid F_t].$$

Является ли эта модель *хорошо определенной*? Халл и Уайт доказывают, что если в некоторый момент времени (скажем, 0) известна волатильность ставки r и волатильность облигаций всех сроков погашения, тогда, так как

$$dP(t, T) = -P(t, T)d(r_t B(t, T) + A(t, T)) + P(t, T)B^2(t, T)dW_t/2,$$

волатильность дисконтной облигации со сроком погашения T равна $\sigma_0 B(0, T)P(0, T)$; и так как это известно, можно вывести $B(0, T)$ для всех T. Поскольку $B(0, T)$ стала известной, можно переписать $A(0, T)$ с помощью формулы (1.30). Но теперь, зная $B(0, T)$, мы можем найти K, а потом и β из равенства (1.31). Тогда первое дифференцирование $A(0, T)$ дает

$$e^{K_T} A'(0,\ T) = \int_0^T \left(\alpha_s e^{K_s} - \int_0^s \sigma_y^2 e^{2K_y - K_s} dy\right) ds,$$

а второе –

$$e^{K_T}[\beta_T A'(0,T) + A''(0,T)] = \alpha_T e^{K_T} - \int_0^T \sigma_y^2 e^{2K_y - K_T} dy;$$

третье дифференцирование приводит к выражению

$$e^{2K_T}[2\beta_T^2 A'(0,\ T) + 3\beta_T A''(0,\ T) + \beta_T' A'(0,\ T) + A'''(0,\ T)] =$$

$$= (\alpha_T' + 2\beta_T \alpha_T - \sigma_T^2)\ e^{2K_T}.$$

Это уравнение может не иметь единственного решения относительно α и σ, но оно дает нам равенство

$$\alpha_T' + 2\beta_T \alpha_T - \sigma_T^2 = \varphi(T)$$

для некоторой известной функции, которое удовлетворяется, если взять, например,

$$\sigma_T^2 = \varepsilon + \varphi(T)^-, \ \ \alpha'_T + 2\beta_T\alpha_T = \varepsilon + \varphi(T)^+$$

для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Очевидно, что эта модель исключительно *гибкая* и для любой исходной кривой доходности может быть согласована с любой исходной временной структуры волатильности. Однако оценка модели на основе реальных данных не является практической. Во-первых, кривая доходности не будет какой-либо гладкой кривой, заданной для всех положительных реальных значений; на практике она известна только на ограниченном множестве сроков погашения (обычно 10–20) с сомнительной точностью измерения. От всякой процедуры, которая требует дифференцирования этой «кривой», не следует ожидать достаточной точности. Во-вторых, даже если можно было бы получить оценки функций α, β и σ на основе данных, нет причины, по которой мы должны получить совпадающую оценку, если выполним такой же анализ временной структуры неделей позже.

Лучшее, на что можно надеяться, – это ограничить (α, β, σ) так, чтобы они лежали в некотором малом параметрическом семействе, а затем оценить параметры. В качестве наименьшего, представляющего интерес семейства можно рассматривать модель Васичека, в которой функции вырождаются в константы и цены облигаций, задаваемые формулой (1.29), определяются просто:

$$m_t = \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\left(r_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad v_t = \frac{\sigma^2}{2\beta^3}(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}).$$

Этот частный случай достаточно конкретный для нас, чтобы исследовать единственную нежелательную особенность гауссовой модели, а именно то, что процентные ставки могут быть *отрицательными*. Итак, в модели Васичека предельным распределением r является $N(\alpha/\beta, \sigma^2/2\beta)$, и если мы выберем α/β достаточно большим по сравнению со стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{2\beta}$, то можем представить, что отрицательные процентные ставки будут маловероятны. Однако выбрав численные значения $3\alpha = 0{,}001$; $3\beta = 0{,}01$; $3\sigma = 0{,}000008$, имеем: 1) $\alpha/\beta = 5\sigma/\sqrt{2\beta}$; 2) $\alpha/\beta = 0{,}1$; 3) $(1/t)\ln P(0, t) \to 0{,}02$. Это говорит о том, что, во-первых, в стационарном режиме вероятность отрицательных процентных ставок очень мала (около 3×10^{-7}); во-вторых, среднее значение r равно 0,1 и не является неблагоразумной годовой ставкой; а в-третьих, цены облигаций растут экспоненциально (что является абсурдным). Цена $P(0, T)$ не поднимается до единицы в течение очень длительного времени, и модель, для которой может так получаться, должна быть или отвергнута, или использоваться с осторожностью. Этого недостаточно, чтобы проблемой можно было пренебречь.

Рассмотрим процесс спот-ставки r_t^+ вместо процесса r_t, но тогда простое гауссово поведение исчезает. Однако мы можем установить следующий результат.

Предположим, что r – гауссов процесс, $Er_t = \mu_t$, $\mathrm{cov}(r_s, r_t) = \rho_{st}$. Тогда

$$0 \le E\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) - E\exp\left(-\int_0^T r_u^+ du\right) \le$$

$$\le Ee^{-R_T}\left\{1-\exp\left(-E\left(e^{-R_T}\int_0^T r_u^- du\right)\Big/ Ee^{-R_T}\right)\right\} =$$

$$= Ee^{-R_T}\left\{1-\exp\left(-\int_0^T \sqrt{\rho_{ss}}\, G\left(\left(\mu_s - \int_0^T \rho_{st} dt\right)\Big/\sqrt{\rho_{ss}}\right) ds\right)\right\}, \quad (1.32)$$

где

$$R_T \equiv \int_0^T r_u du, \quad G(a) \equiv E(W_1 - a)^+ = e^{-a^2/2}\Big/\sqrt{2\pi} - a\overline{\Phi}(a)$$

и $\overline{\Phi}$ является дополнением функции стандартного нормального распределения.

Таким образом,

$$0 \le 1 - E\left[\exp\left(-\int_0^T r_u^+ du\right)\right]\Big/ E\left[\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\right] \le$$

$$\le 1-\exp\left[-\int_0^T \sqrt{\rho_{ss}}\, G\left(\left(\mu_s - \int_0^T \rho_{st} dt\right)\Big/\sqrt{\rho_{ss}}\right) ds\right].$$

Применение неравенства

$$G(a) \le \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1+a^2)} + a^-$$

дает хорошее обоснование для выбора используемых величин. Например, для модели Васичека

$$\mu_s = r_0 e^{-\beta s} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta s}),$$

$$\rho_{st} = \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{-\beta|s-t|} - e^{-\beta s - \beta t}),$$

поэтому

$$\int_0^T \rho_{st} dt = \frac{\sigma^2}{\beta^2}[1 - e^{-\beta s} - e^{-\beta T}\mathrm{sh}(\beta s)].$$

Принимая значения параметров из вышеприведенного примера $3\alpha = 0{,}001$; $3\beta = 0{,}01$; $3\sigma = 0{,}000008$, получение цены облигации со сроком $T = 10$ дает 0,041, для $T = 20$ – 0,078 и для $T = 50$ – 0,182.

Представленное утверждение доказывается с использованием неравенства Иенсена и того факта, что если X и Z являются нормальными с нулевым средним, $EX^2 = 1$, тогда для любых θ

$$Ee^{-Z}(X + \theta)^- = \exp(EZ^2/2)G(\theta - \mathrm{cov}(X, Z)).$$

Оценка сверху (1.32) может быть хорошей аппроксимацией разности между ценами облигаций при использовании гауссова процесса r и положительной части r. Это объясняется тем, что единственной используемой аппроксимацией для получения неравенства (1.32) является $1 - e^{-X} \le X$. Для малых $X > 0$ разность $X - 1 + e^{-X}$ имеет порядок $O(X^2)$ и для больших значений X она равна $O(X)$, но при усреднении распределение величины r_s^- будет иметь быстро уменьшающийся хвост, если мы выберем параметры, которые обеспечивают малые значения вероятности отрицательных значений спот-ставки. Таким образом, аппроксимация должна быть точной.

Комбинирование независимых факторов

При одномерных моделях неявно подразумевается, что локальные изменения цены облигации всех сроков погашения полностью коррелированы. Они также до некоторой степени ограничены формами кривых доходности, которые ими могут порождаться. Для получения менее ограничительных моделей приходится переходить к многомерным моделям. Когда количество факторов увеличивается, численный анализ моделей становится все более и более трудным, поэтому возрастает важность получения решений в замкнутой форме или близких к замкнутой форме. В связи с этим сначала проиллюстрируем подход CIR на примере двух факторов. После этого рассмотрим многофакторные модели, для которых можно найти решения в замкнутой форме. Поэтому в многофакторном случае ограничимся гауссовыми и CIR-моделями. Так как гауссовы модели предполагают больше возможностей для получения аналитического решения и для того, чтобы сделать модели количественно сопоставимыми, начнем с многофакторной версии модели CIR, а затем построим гауссову модель, которую приспособим к той же исходной временной структуре и получим согласованные характеристики факторов.

Дж. Кокс, Дж. Ингерсолл и С. Росс (CIR) предложили конструировать многофакторную модель путем добавления независимых факторов. В случае двух факторов это означает определение краткосрочной ставки как

$$r(t) = R(X_1(t), X_2(t)) = X_1(t) + X_2(t),$$

где

$$dX_1(t) = \mu_1(X_1(t))dt + \sigma_1(X_1(t))dB_1(t),$$

$$dX_2(t) = \mu_2(X_2(t))dt + \sigma_2(X_1(t))dB_2(t)$$

для некоторых функций μ_1, μ_2, σ_1 и σ_2 и независимых процессов броуновских движений B_1 и B_2.

Независимость факторов X_1 и X_2 дает возможность записать цену дисконтированной облигации в виде

$$P(t, u) = E_t\left(\exp\left\{-\int_t^u X_1(s)ds\right\}\right)E_t\left(\exp\left\{-\int_t^u X_2(s)ds\right\}\right),$$

и доходность равна

$$y(t, u) = y_1(t, u) + y_2(t, u), \tag{1.33}$$

где $y_i(t, u)$ – доходность на облигацию с датой погашения u в момент времени t, если бы процесс краткосрочной ставки принял значение X_i. Таким образом, если имеется решение для кривой доходности, когда краткосрочная ставка следует процессу (1.18), тогда имеется решение для кривой доходности и в многофакторной модели.

Факторная модель с двумя независимыми диффузиями с квадратным корнем, которая была введена CIR, изучалась в дальнейшем Ф. Лонгстафом и Е. Шварцем (Longstaff, Schwartz, 1992), а также Р. Ченом и Л. Скоттом (Chen, Scott, 1992). Предполагалось, что каждый из процессов X_i удовлетворяет уравнению вида (1.23) с различными k, θ и σ и независимыми броуновскими движениями. Лонгстаф и Шварц получили формулы для опционов на дисконтированную облигацию, а Чен и Скотт вывели формулы для опционов на другие ФП процентных ставок. Лонгстаф и Шварц заметили, что волатильность краткосрочной ставки является также линейной комбинацией двух факторов, поэтому краткосрочную ставку и ее волатильность можно принять в качестве двух факторов так же, как вектор доходностей можно принимать в качестве факторов в любой аффинной факторной модели. Однако, как указывают Чен и Скотт, с точки зрения проведения вычислений проще работать с независимыми факторами, чем с краткосрочной ставкой и ее волатильностью, которые являются коррелированными.

Многофакторная модель временной структуры «с квадратным корнем»

Здесь предполагается, что мгновенная краткосрочная процентная ставка является суммой независимых переменных состояния, или факторов

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j(t).$$

Динамика переменных состояния принимается, как в модели CIR:

$$dz_j(t) = (\theta_j - a_j z_j(t))dt + \sigma_j \sqrt{z_j(t)}\, dB_j(t),$$

или в векторной форме

$$dZ(t) = (\theta - AZ(t))dt + V\begin{pmatrix}\sqrt{z_1(t)}\\ \ldots\\ \sqrt{z_n(t)}\end{pmatrix}dB(t).$$

Заметим, что A и V являются диагональными матрицами. Для того чтобы обеспечить модели возможность аналитического решения, примем, что θ и V не зависят от времени. Это приводит к тому, что в общем случае приспособить модель к произвольной исходной временной структуре невозможно. Однако так как нашей целью является анализ изменений временной структуры, порождаемых внутренней структурой модели, это не будет серьезным ограничением.

Формула модели CIR для цены дисконтной облигации с датой погашения T в момент времени t, обобщенная для многомерного случая, дана Ченом и Скоттом (1995):

$$P(Z(t), t, T) = A(t, T)\exp\{-b(t, T)Z(t)\},$$

где

$$A(t, T) = \prod_{j=1}^{n} A_j(t, T), \quad A_j(t, T) = \left(2c_j w_j \exp\left\{\frac{1}{2}(c_j + a_j)(T - t)\right\}\right)^{2\theta_j/\sigma_j^2}.$$

Здесь $b(t, T)$ является вектор-строкой с компонентами

$$b_j(t, T) = 2w_j(\exp\{c_j(T-t)\} - 1),$$

где $w_j = [(c_j + a_j)\exp\{c_j(T-t)\} + c_j - a_j]^{-1}$, $c_j = \sqrt{a_j^2 + 2\sigma_j^2}$.

Пусть

$$\tilde{z}_j(T) = z_j(T)\, 2(w_j\,\sigma_j^2(\exp\{c_j(T-t)\} - 1))^{-1} = 4b_j(t, T)^{-1} z_j(T)/\sigma_j^2,$$

тогда оказывается (Jamshidian, 1987), что $\tilde{z}_j(T)$ условно при фиксированном $z_j(t)$ относительно вероятностной меры θ, отрегулированной риском форвардной ставки, имеет нецентральное хи-квадрат распределение с v_j степенями свободы и параметром нецентральности λ_j, которые задаются равенствами

$$v_j = 4\theta_j/\sigma_j^2, \quad \lambda_j = 16z_j(t)\,w_j^2 c_j^2 \exp\{c_j(T-t)\}/\sigma_j^2\, b_j(t, T).$$

Кроме того, дисперсии факторов $\tilde{z}_j(T)$ зависят от времени t при мере θ следующим образом:

$$\mathrm{var}[\tilde{z}_j(T)|\tilde{z}_j(t)] = 2\,(v_j + 2\lambda_j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{var}[z_j(T)\mid z_j(t)] = \sigma_j^2 b_j(t,T)[\theta_j b_j(t,T)/2 + 4z_j(t)\,w_j^2 c_j^2 \exp\{c_j(T-t)\}].$$

Сопоставимая гауссова модель

Снова предположим, что краткосрочная процентная ставка определяется независимыми факторами, но теперь динамика переменных состояния модели будет соответствовать обобщенной модели Васичека:

$$dz_j(t) = (\theta_j(t) - a_j z_j(t))\,dt + \sigma_j\,dB_j(t),\ 1 \le j \le n.$$

Одно- и двухфакторные версии этой модели проанализированы Эль Каруи и др. (El Karoui et al., 1991); n-факторная версия может быть рассмотрена аналогичным образом. Для того чтобы эта модель была сопоставимой с моделью «с квадратным корнем», сделаем следующее. Во-первых, установим коэффициенты возвращения к среднему a_j равными соответствующим коэффициентам в модели «с квадратным корнем». Во-вторых, выберем параметры волатильности σ_j таким образом, чтобы держать дисперсии переменных состояния в течение определенного временного горизонта одинаковыми в моделях гауссовой и «с квадратным корнем». В-третьих, зависящие от времени коэффициенты дрейфа $\theta_j(t)$ позволяют согласовать исходную временную структуру, если мы примем исходную временную структуру из модели «с квадратным корнем» как исходную для гауссова случая. В этой модели логарифм цены дисконтных облигаций определяется выражением

$$\ln P(Z(t), t, T) = \ln\frac{P(Z(0), 0, T)}{P(Z(0), 0, t)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\sigma_j^2}{a_j^2}[(1-e^{-a_j(T-s)})^2 - (1-e^{-a_j(t-s)})^2]\,ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\sigma_j}{a_j}(e^{-a_j(T-s)} - e^{-a_j(t-s)})\,dW_j(s).$$

Заметим, что зависимость от $\theta_j(t)$ учитывается в логарифме исходной цены облигации с соответствующей датой погашения. Изменяя ко времени T^* форвардную меру θ^*, где

$$dB_j^{\theta^*}(t) = dB_j(t) + \frac{\sigma_j}{a_j}[1 - e^{-a_j(T^*-t)}]\ dt$$

являются независимыми стандартными винеровскими процессами, мы можем написать

$$\ln P(Z(t), t, T) = \ln\frac{P(Z(0), 0, T)}{P(Z(0), 0, t)} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \frac{\sigma_j^2}{a_j^2}[(1-e^{-a_j(T-s)})^2 - (1-e^{-a_j(t-s)})^2]ds -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \frac{\sigma_j^2}{a_j^2}(1-e^{-a_j(T^*-s)})[e^{-a_j(T-s)} - e^{-a_j(t-s)}]ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\sigma_j}{a_j}[e^{-a_j(T-s)} - e^{-a_j(t-s)}]\ dB_j^{\theta^*}(s).$$

Дисперсии переменных состояния одинаковы при нейтральной к риску и отрегулированной форвардным риском мерах и задаются равенствами

$$\mathrm{var}[z_j(t)] = \int_0^t e^{-2a_j(t-s)}\sigma_j^2 ds = \frac{\sigma_j^2}{2a_j}(1-e^{-2a_j t}).$$

Выберем σ_j в гауссовой модели так, чтобы

$$\mathrm{var}\,[z_j(t)] = \mathrm{var}_{\chi^2}[z_j(t)].$$

Таким образом,

$$\sigma_j^2 = 2a_j(1 - e^{-2a_j t})^{-1}\,\mathrm{var}_{\chi^2}[z_j(t)],$$

где $\mathrm{var}_{\chi^2}[z_j(t)]$ задается так же, как в многофакторной модели временной структуры «с квадратным корнем».

Двухфакторные модели

В многофакторных моделях имеется больше возможностей приспосабливать модель к реальной рыночной ситуации, однако получаемые решения становятся довольно сложными. Некоторым компромиссом является использование двухфакторных моделей: число параметров по сравнению с однофакторной моделью увеличивается, а увеличение сложности получаемого решения может оказаться незначительным. В качестве примера приведем две чаще других цитируемые модели.

Модель Лонгстафа – Шварца

Ф. Лонгстаф и Е. Шварц (Longstaff, Schwartz, 1992) разработали общие рамки равновесия для определения стоимости финансовых производных, чувствительных к изменениям процентной ставки. Они использовали вариант двух переменных состояния в экономике, изменяющейся непрерывно во времени. Этими двумя факторами являются краткосрочная ставка r и дисперсия изменений краткосрочной процентной ставки v, позволяя, таким образом, ценам финансовых производных отражать как текущий уровень процентной ставки, так и текущий уровень волатильности процентной ставки. Сначала авторы разработали динамику двух экономических факторов, которые эволюционируют независимо друг от друга и используются для характеристики процесса, описывающего реализацию дохода на инвестицию:

$$dx = (\gamma - \delta x)dt + \sqrt{x}\, dB_1,$$

$$dy = (\eta - \phi y)dt + \sqrt{y}\, dB_2,$$

γ, δ, η и ϕ – параметры отрегулированного риском процесса для некоррелированных переменных состояния.

Основное дифференциальное уравнение в частных производных для стоимости H всех свободных от неуплаты финансовых производных от процентных ставок имеет вид

$$xH_{xx} / 2 + yH_{yy} / 2 + (\gamma - \delta x)H_x + (\eta - \phi y)H_y - (\alpha x + \beta y)H = H_T.$$

Краткосрочная процентная ставка и дисперсия изменений этой ставки даются как взвешенные суммы переменных состояния x и y, в которых веса являются параметрами процесса доходности физической инвестиции:

$$r = \alpha x + \beta y, \quad v = \alpha^2 x + \beta^2 y.$$

Вид r и v позволяет авторам выразить свои результаты через r и v как переменные состояния, хотя выражения результатов через исходные переменные x и y в вычислительном отношении проще. Преобразование двух наборов переменных состояния, задаваемое этими равенствами, подразумевает высокую степень корреляции между r и v. Кроме того, чтобы x и y были неотрицательными, требуется, чтобы v удовлетворяло следующим граничным условиям: $\alpha r \leq v \leq \beta r$.

Полученный в результате совместный процесс динамики краткосрочной ставки и волатильности краткосрочной ставки (т. е. исходных переменных состояния) позволяет выписать решение в явной форме для цен дисконтных облигаций. Цены облигаций, выраженные через r и v, принимают вид

$$P(t, T) = \exp(G(\tau) + C(\tau)r + D(\tau)v),$$

где $\tau = T - t$.

Цена является функцией переменных состояния и их отрегулированных риском параметров. Функции времени G, C и D определяются в явной форме и легко вычисляются:

$$G(\tau) = \kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau),$$

$$A(\tau) = \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(\exp(\phi\tau) - 1) + 2\phi},$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\delta + \psi)(\exp(\psi\tau) - 1) + 2\psi},$$

$$C(\tau) = \frac{\alpha\phi(\exp(\psi\tau) - 1)B(\tau) - \beta\psi(\exp(\phi\tau) - 1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

$$D(\tau) = \frac{\psi(\exp(\phi\tau) - 1)A(\tau) - \phi(\exp(\psi\tau) - 1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

где $\phi = \sqrt{2\alpha + \delta^2}$, $\psi = \sqrt{2\beta + \theta^2}$, $\kappa = \gamma(\delta + \phi) + \eta(\theta + \psi)$.

Поэтому цена дисконтированной облигации зависит от шести параметров – $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ и θ. Доходности на облигацию с датой погашения T получаем из уравнения (1.1):

$$y(t, T) = \frac{-(\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta B(\tau)) + C(\tau)r + D(\tau)v}{\tau}.$$

Если τ неограниченно увеличивается, доходность до погашения на бессрочную облигацию (*infinitely maturing bond*) сходится к постоянной величине, не зависящей от r и v, ввиду этого значение кривой доходности для долгосрочных облигаций определяется сразу же, как только определены параметры процесса:

$$y_\infty = \gamma(\phi - \delta) + \eta(\psi - \theta).$$

Для очень коротких сроков погашения изменения волатильности краткосрочной ставки не влияют на цены облигаций.

Зависимость кривой доходности от краткосрочной ставки и ее волатильности позволяет временной структуре принимать большее разнообразие форм, чем в случае эквивалентной однофакторной модели. Допустимые кривые, определяемые уравнением кривой доходности, могут быть монотонно возрастающими или убывающими, иметь максимум или минимум, или их комбинацию. Изменения обеих переменных состояния, когда другие переменные фиксированы, могут иметь значительное влияние на форму кривой доходности.

Выражение для временной структуры волатильности текущей ставки доходности $\sigma_y(t, s)$, вытекающее из модели, зависит от двух факторов, обеспечивает большее разнообразие допустимых структур волатильности и определяется формулой

$$\frac{1}{\tau}\left[\left(\frac{\alpha\beta\psi^2 XA^2(\tau) - \alpha\beta\phi^2 YB^2(\tau)}{\phi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)r + \left(\frac{\beta\phi^2 YB^2(\tau) - \alpha\psi^2 XA^2(\tau)}{\phi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)v\right]^{1/2},$$

где $X = (\exp(\phi\tau) - 1)^2$ и $Y = (\exp(\psi\tau) - 1)^2$.

Из этих результатов видно, что для определения цены дисконтной облигации $P(t, T)$ требуется знать уровень краткосрочной ставки, волатильность ставки и шесть дополнительных параметров. Позже Лонгстаф и Шварц (1993) описали метод оценки параметров с помощью наблюдений временного ряда процентных ставок и оценок временного ряда волатильностей процентных ставок. Рассмотрев эти временные ряды и использовав приведенные выше ограничения на v,

α и β можно оценить соответственно как минимум и максимум отношения v/r. Стационарные распределения для r и v и доходность бессрочной дисконтной облигации являются выражениями, зависящими только от параметров отрегулированного риском процесса и α и β. Преобразовывая эти выражения, получаем следующие соотношения:

$$\delta = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\beta E[r]-E[v])}{2(\beta^2 \mathrm{var}[r]-\mathrm{var}[v])}, \quad \gamma = \frac{\delta(\beta E[r]-E[v])}{\alpha(\beta-\alpha)},$$

$$\xi = \frac{\beta(\alpha+\beta)(E[v]-\alpha E[r])}{2(\mathrm{var}[v]-\alpha^2 \mathrm{var}[v])}, \quad \eta = \frac{\xi(E[v]-\alpha E[r])}{\beta(\beta-\alpha)}.$$

Тогда для оценивания последнего остающегося параметра θ можно использовать оценку по кривым доходности различных сроков погашения (*cross section*) как значение, которое минимизирует некоторую ошибку для различных сроков погашения дисконтных облигаций. Вместе с тем, хотя теоретически эта методология оценивания работает, природа финансовых временных рядов, доступных финансовым исследователям и рыночным практикам, делает ее практическую реализацию крайне трудной.

Модель Фонга – Васичека

В серии относящихся к проблеме статей Х. Фонг и О. Васичек (Fong, Vasiček, 1991) представили двухфакторную модель временной структуры процентных ставок с факторами, определяющими цены дисконтных облигаций, как в модели, которую мы только что рассмотрели. Авторы получили цены дисконтных облигаций при условии отсутствия арбитража. Поведение краткосрочной ставки определяется следующим диффузионным процессом:

$$dr = \alpha(\bar{r} - r)dt + \sqrt{v}\, dB_1,$$

$\bar{r}$ – установившееся (*long-term*) среднее краткосрочной ставки, которая имеет мгновенную волатильность v.

Фонг и Васичек предполагают, что дисперсия v является стохастической и определяется как процесс

$$dv = \gamma(\bar{v} - v)dt + \xi\sqrt{v}\, dB_2,$$

где $\bar{v}$ – установившееся среднее волатильности.

Случайная составляющая процесса волатильности имеет дисперсию, пропорциональную текущему уровню волатильности. Оба процесса описываются мерой, нейтральной к риску. Стохастическое приращение dB_1 краткосрочной ставки и стохастическое приращение dB_2 процесса волатильности коррелированы с коэффициентом ρ.

Одной из задач совместного определения переменных состояния, задаваемых этими уравнениями, является то, что процентные ставки могут стать отрицательными. Процесс для краткосрочной ставки, по существу, такой же, как и в модели Васичека. Дополнительная неопределенность вводится с помощью предположения о том, что дисперсия краткосрочной ставки сама следует стохастическому процессу, предполагающему, что вероятность появления отрицательных ставок выше в двухфакторной модели, чем в ее однофакторном эквиваленте.

Приведенные выше предположения описывают модель Фонга и Васичека. Получаемое в результате основное УЧП, определяющее цену дисконтной облигации, имеет вид

$$P_t + \alpha(\bar{r} - r)P_r + \gamma(\bar{v} - v)P_v + vP_{rr}/2 + \rho\xi vP_{rv} + \xi^2 vP_{vv}/2 - rP = 0$$

при обычных граничных условиях. Цена дисконтной облигации, которая является решением этого уравнения в частных производных, выражается формулой

$$P(t, s) = \exp\{-rD(\tau) + vF(\tau) + G(\tau)\},$$

где $D(\tau) = (1 - e^{-\alpha\tau})/\alpha$ – мера дюрации из модели Васичека; $F(\tau)$ и $G(\tau)$ вычисляются сложными выражениями, включающими конфлюентные гипергеометрические функции, и здесь не приводятся.

Доходности на дисконтируемую облигацию после применения соотношения (1.1) выражаются равенством

$$y(t, s) = [rD(\tau) - vF(\tau) - G(\tau)]/\tau,$$

позволяющим кривой доходности принимать те же возможные формы, как и в предыдущей двухфакторной модели. Вид функции волатильности текущей доходности находится с помощью применения леммы Ито к формуле для $y(t, s)$, что приводит к выражению

$$\sigma_R(t, s) = \frac{1}{\tau}\sqrt{(D(\tau)^2 - 2\rho\xi F(\tau)D(\tau) + \xi^2 F(\tau)^2)v}.$$

В полный набор оцениваемых параметров входят восемь величин: параметры процесса, отрегулированного риском, корреляция между переменными состояния и коэффициенты премий факторов риска.

Итак, двухфакторные модели временной структуры позволяют более реалистично представлять кривую доходности, чем их однофакторные эквиваленты. Они обращаются к эмпирическим свидетельствам о том, что на реальных рынках действует более чем один фактор. Приведенные модели обеспечивают широкое разнообразие допустимых кривых доходности и временных структур волатильности и приводят к довольно простым вычислениям, но недостаточно подходят для практической реализации (ненаблюдаемость и большое число параметров).

Согласование кривой доходности

На практике желательно согласовывать модель с фактической кривой доходности в даты погашения, для которых доходности достоверно известны. Как указывалось выше, это является особенностью так называемых «моделей, свободных от арбитража». Имеются разнообразные способы модификации факторных моделей, чтобы согласовывать их с кривой доходности.

В методе, предложенном CIR, нужно комбинировать два независимых фактора, как описано выше, когда один из факторов – это детерминированная функция времени. Для удобства рассмотрим однофакторную модель CIR, хотя метод применим к любым моделям. Предположим, что краткосрочная ставка является суммой диффузии с квадратным корнем r, определяемой уравнением (1.23), и детерминированной функции. Обозначим через t дату, в которую мы хотим согласовать кривую доходности. Детерминированную функцию можно записать как $X(t, u)$, а краткосрочную ставку – как $r(u) + X(t, u)$ для $u \geq t$. Определим $X(t, t) = 0$ для того, чтобы $r(t)$ совпадало с краткосрочной ставкой в момент времени t. Формула (1.33) для доходности преобразуется к виду

$$y(t, u) = a(\tau) + b(\tau)r(t) + \frac{1}{\tau}\int_t^u X(t,s)ds, \tag{1.34}$$

где a и b – те же, что и в однофакторной модели CIR, и $\tau \equiv u - t$.

Для любых значений параметров k, θ и σ можно выбрать X так, чтобы (1.34) совпадало с наблюдаемой кривой доходности в момент времени t. Р. Дайбвиг (Dybvig, 1998) рассматривает определение цен финансовых производных процентных ставок в рамках такой модели.

При другом подходе, который применялся для однофакторной модели CIR, предполагается, что параметры k, θ и σ изменяются со временем. CIR предложили принять θ в качестве переменного параметра, а k и σ считать константами. Преимущество модификации состоит в том, что функция b не зависит от θ, как это видно из уравнения (1.26). Таким образом, интегрирование уравнения (1.27) показывает, что кривая доходности для модифицированной модели

$$y(t, u) = \widehat{a}(\tau) + b(\tau)r(t),$$

где $\widehat{a}(\tau) = \dfrac{k}{\tau}\int\limits_0^{\tau} \theta(t+s)\beta(t+s)ds$, а $\beta(\tau) = \tau b(\tau)$, как и прежде.

Ф. Джамшидиан (Jamshidian, 1993) рассмотрел другую модификацию однофакторной модели CIR. Он предложил выбирать параметры k, θ и σ так, чтобы для некоторой константы δ выполнялось равенство $4k(t)\theta(t)/\sigma^2(t) = \delta$. Особенность этой модификации в том, что она является преобразованием в процесс BSEQ^{δ}, так же как в первоначальной однофакторной модели CIR. Здесь процесс BSEQ^{δ} определяется выражением

$$\widehat{r}(u) \equiv r(h^{-1}(u))\exp\left\{\int\limits_0^{h^{-1}(u)} k(s)ds\right\}, \text{ где } h(t) = \frac{1}{\delta}\int\limits_0^t k(u)\theta(u)\exp\left(\int\limits_0^u k(s)ds\right).$$

§ 4. МЕТОД HJM

Основной мотивацией работы Д. Хита, Р. Джарроу и А. Мортона (Heath, Jarrow, Morton, 1992), далее HJM, является то, что в факторной модели дрейф факторов при нейтральной к риску вероятностной мере неизвестен или цены рисков неизвестны, что эквивалентно. Можно вывести дрейф из цен. Например, в однофакторной модели CIR можно выбрать k и θ так, чтобы кривая доходности, порождаемая моделью, совпадала с фактической кривой доходности насколько это возможно. Заметим, что σ в однофакторной модели CIR можно оценить по выборочным данным краткосрочной ставки, так как мгновенные дисперсии не меняются при переходе от исходной вероятностной меры к нейтральной к риску мере. Для лучшего согласования с фактической кривой доходности можно ввести второй детерминированный фактор, как описано выше. Однако Хит, Джарроу и Мортон утверждают, что этот метод выбора дрейфа может быть сложным в вычислительном отношении.

Некоторые свойства дрейфа при нейтральной к риску вероятностной мере нам уже известны. В частности, ожидаемый темп изменения цены дисконтированной облигации при нейтральной к риску вероятностной мере равен краткосрочной процентной ставке. Этот факт имеет последствия для дрейфа величин, зависящих от цен облигаций, например доходностей и форвардных ставок. Основной результат Хита, Джарроу и Мортона состоит в том, что дрейф форвардных ставок при нейтральной к риску вероятностной мере полностью определяется их волатильностью. Так как волатильности при нейтральной к риску вероятностной мере остаются такими же, как и при фактической вероятностной мере, они могут оцениваться по выборочным данным форвардных ставок. Однако форвардные ставки являются скоростями изменения логарифмов цен облигаций (см. определение (1.35)), поэтому они очень чувствительны к ошибкам в определении цен облигаций, а также и к методам интерполяции по датам погашения; искажения форвардных ставок можно рассматривать в историческом плане. Тогда текущая кривая форвардной ставки служит начальным условием, таким образом гарантируя согласование модели с фактическими ценами в исходный момент времени. Легкость, с которой согласовывается кривая доходности, – другая мотивация применения метода HJM, хотя, как было показано выше, это также легко сделать и в случае факторных моделей.

Форвардные ставки

Форвардной кривой в дату t называется функция $f(t, u)$ для $u \geq t$, определяемая равенством

$$f(t, u) = \frac{-d \ln P(t, u)}{du}. \qquad (1.35)$$

Из этого следует, что цены дисконтированных облигаций выражаются в виде

$$P(t, u) = \exp\left\{-\int_t^u f(t, s)\,ds\right\}.$$

Краткосрочная ставка в момент времени t является форвардной ставкой для даты погашения t, т. е. $r(t) = f(t, t)$.

Дрейф форвардных ставок

Рассмотрим, как эволюционирует форвардная ставка $f(t, u)$ при изменении t для фиксированной даты погашения u. Для простоты примем, что имеется только единственный источник неопределенности (т. е. единственный процесс броуновского движения), управляющий кривой доходности. Обобщение на случай нескольких источников неопределенности делается обычным способом.

Для того чтобы было видно, что дата погашения u фиксирована, обозначим форвардную ставку как $f(t|u)$ и цену дисконтированной облигации как $P(t|u)$. Можно принять, что эволюция форвардной ставки определяется уравнением

$$df(t|u) = \mu(t|u)dt + \sigma(t|u)dB(t)$$

для некоторых стохастических процессов $\mu(t|u)$ и $\sigma(t|u)$, причем для каждых t и $u \geq t$ процессы $\mu(t|u)$ и $\sigma(t|u)$ должны зависеть только от информации, доступной к моменту времени t, например от кривых доходности для моментов времени $s \leq t$. Цель исследования – понять, что можно сказать относительно $\mu(t|u)$.

Обозначим $Y(t|u) \equiv \int_t^u f(t|s)ds$, так что цены дисконтированной облигации вычисляются по формуле $P(t|u) = \exp\{-Y(t|u)\}$. Применив к $P(t|u)$ формулу Ито, получим

$$\frac{dP(t|u)}{P(t|u)} = -dY(t|u) + \frac{1}{2}d\langle Y(t|u), Y(t|u)\rangle. \tag{1.36}$$

Используя теорему Фубини для стохастических интегралов и делая подстановку $f(t, t) = r(t)$, получаем

$$dY(t|u) = -r(t)dt + \left(\int_t^u \mu(t|s)ds\right)dt + \left(\int_t^u \sigma(t|s)ds\right)dB(t), \tag{1.37}$$

что влечет

$$\frac{d\langle Y(t|u), Y(t|u)\rangle}{dt} = \left(\int_t^u \sigma(t|s)ds\right)^2 = 2\int_t^u \left(\sigma(t|s)\int_t^s \sigma(t|v)dv\right)ds.$$

Последнее равенство получается интегрированием по частям.

Таким образом, ожидаемая мгновенная ставка доходности дисконтной облигации равна

$$r(t) - \left(\int_t^u \mu(t|s)ds\right) dt + \int_t^u \left(\sigma(t|s)\int_t^s \sigma(t|v)dv\right) ds.$$

Приравнивание этого выражения к краткосрочной ставке $r(t)$ влечет

$$\left(\int_t^u \mu(t|s)ds\right) dt = \int_t^u \left(\sigma(t|s)\int_t^s \sigma(t|v)dv\right) ds.$$

Это справедливо для всех $u \geq t$, если и только если для всех $u \geq t$

$$\mu(t|u) = \sigma(t|u)\int_t^u \sigma(t|s)\, ds. \tag{1.38}$$

Равенство (1.38) называется формулой HJM для дрейфа форвардной ставки в терминах волатильности форвардной ставки и волатильностей промежуточных форвардных ставок. Подставляя приращение (1.37) в (1.36), получим, что $\int_t^u \sigma(t|s)\, ds$ оказывается стандартным отклонением доходности дисконтной облигации с датой погашения u. Следовательно, равенство (1.38) устанавливает, что дрейф форвардной ставки – это произведение стандартных отклонений форвардной ставки и доходности дисконтной облигации.

Краткосрочная ставка

Формула для $\mu(t|u)$ влечет

$$f(t|u) = f(0|u) + \int_0^t df(s|u) =$$

$$= f(0|u) + \int_0^t \left(\sigma(s|u)\int_s^u \sigma(s|v)dv\right) ds + \int_0^t \sigma(s|u)\, dB(s).$$

Полагая $u = t$, получаем $f(t|t) = r(t)$ и

$$r(t) = f(0|t) + \int_0^t \left(\sigma(s\,|\,t) \int_s^t \sigma(s\,|\,v)\,dv \right) ds + \int_0^t \sigma(s|t)\,dB(s).$$

Поэтому распределение краткосрочной ставки также определяется только волатильностями форвардных ставок.

Факторные модели

Метод HJM моделирования кривой доходности состоит в том, чтобы определить в каждую дату t, для которой должны быть найдены цены активов, чувствительных к процентной ставке, форвардную кривую $f(t|u)$ и процесс $\sigma(t|u)$ волатильности форвардной ставки. Подчеркнем, что мы говорим о методе моделирования, а не о модели, поскольку он не связан с какой-то конкретной моделью. Действительно, любая модель кривой доходности, в которой отсутствуют арбитражные возможности, является согласованной с этим методом при условии перекалибровки параметров в каждую дату t. В частности, факторные модели могут быть записаны в форме HJM. Для пояснения этого утверждения рассмотрим однофакторную модель CIR, в которой к краткосрочной ставке добавляется детерминированная функция $\{X(t,\ u) \mid u \geq t\}$. Такая модель уже рассматривалась выше. В ней доходность определяется формулой (1.34). Как и прежде, используем обозначения $\tau = u - t$, $\alpha(\tau) = \tau a(\tau)$ и $\beta(\tau) = \tau b(\tau)$. Тогда форвардная ставка запишется в виде

$$f(t|u) = \alpha'(\tau) + \beta'(\tau) r(t) + X(t,\ u).$$

Используя формулы (1.26) и (1.27) для α' и β', можно проверить, что стандартное отклонение форвардной ставки равно

$$\sigma(t|u) = \sigma\beta'(\tau)\sqrt{r(t)}\,,$$

а дрейф

$$\mu(t|u) = \sigma^2\,\beta(\tau)\beta'(\tau) r(t), \tag{1.39}$$

где σ в правых частях этих равенств является константой, определенной в уравнении диффузии с квадратным корнем (1.23).

Равенство (1.39) согласуется с формулой HJM (1.38), так как нам известно, что формула (1.38) справедлива для любой модели, в которой отсутствуют арбитражные возможности.

Эти результаты показывают, каким образом при заданной краткосрочной процентной ставке $r(t)$ в момент времени t выражаются форвардные кривые и процессы волатильности форвардной ставки через параметры k, θ, σ и функцию $X(t, u)$. На самом деле параметр θ является избыточным и не влияет на волатильность форвардной ставки, а его влияние на форвардную кривую заменяется согласованием выбора X с фактической форвардной кривой. Такие рассуждения применимы к любой факторной модели. Например, в модели Васичека волатильность форвардной ставки имеет вид $\sigma(t|u) = \sigma\exp\{-k(u - t)\}$, где параметры k и σ в правой части равенства являются коэффициентами уравнения (1.22). Модель Васичека (так же как и любая другая факторная модель) может быть модифицирована для приспособления к текущей кривой доходности путем добавления детерминированной функции времени, как было рассмотрено выше в контексте анализа однофакторной модели CIR. Модифицированная модель Васичека при $k = 0$ (т. е. без возвращения к среднему) является непрерывно-временной версией модели Хо – Ли (1986). Подробное описание модели Хо – Ли содержится в пособии Г. Медведева (1999, разд. 4.3).

П. Ритчкен и Л. Санкарасубраманиан (Ritchken, Sankarasubramanian, 1995) показали, что модель, записанная в форме HJM, является двухфакторной моделью, если и только если

$$\sigma(t|u) = Y(t)\exp\left(-\int_t^u g(s)ds\right)$$

для некоторой детерминированной функции g и стохастического процесса Y. Они также показали, что краткосрочная ставка может быть всегда использована как один из факторов. Частным классом примеров, предложенным Ритчкеном и Санкарасубраманианом, является семейство процессов с волатильностью форвардной ставки вида

$$\sigma(t|u) = \sigma r^{\gamma}(t)\exp\{-k(u - t)\}$$

для постоянных параметров k, γ и σ. Этому классу принадлежат модель Васичека и многофакторная модель CIR.

ГЛАВА
2

ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

§ 1. ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Понятие полезности восходит к Даниилу Бернулли (1738), который показал, что линейная шкала измерения стоимости денег не решает проблему известного Санкт-Петербургского парадокса. Он предложил в качестве основы рассуждений «*моральную стоимость*» денег. По информации К. Борча (Borch, 1974), в XIX в. некоторые математики, например П. Лаплас, пользовались принципом Бернулли и рассматривали пригодность его применения в системах страхования. В 1832 г. К. Барроу представил полностью разработанную теорию страхования, основанную на работе Лапласа по принципу Бернулли. По причинам, которые трудно объяснить, принцип Бернулли был почти полностью забыт экономистами в последовавшем столетии.

Теория полезности была вызвана к жизни в середине XX в. Заслуга в этом принадлежит Дж. фон Нейману и О. Моргенштерну (1947), которые доказали, что функцию полезности можно вывести из набора аксиом, определяющих порядок предпочтения. К. Борч показал, как можно использовать теорию полезности для постановки и решения задач, относящихся к страхованию.

В этой главе дается краткий обзор результатов в области функций полезности и их применений, которые могут быть интересны актуарной и финансовой науке. Сначала вводится система обозначений функции полезности и ассоциированной с ней функции неприятия риска. Теория иллюстрируется примерами, в которых рассматриваются экспоненциальные функции полезности, степенные функции полезности первого рода (включая квадратичную функцию полезности) и степенные функции полезности второго рода (включая логарифмическую функцию полезности).

Случайные доходы упорядочиваются посредством их ожидаемых полезностей. В частности, случайную прибыль можно заменить эквивалентной фиксированной суммой. Это понятие может быть использовано потребителем, желающим определить максимальную премию, которую он мог бы заплатить для получения страхового прикрытия.

Премия, справедливая в терминах ожидаемой полезности, обычно содержит надбавку, которая зависит от степени неприятия страховщиком риска и от совместного распределения исков S и случайного богатства W перед подписанием нового контракта. Для определения такой надбавки можно сформулировать эмпирические правила через $\mathrm{var}[S]$ и $\mathrm{cov}(S, W)$ и доказать классический результат об оптимальности стратегии «стоп-лосс».

При рассмотрении n компаний со случайным богатством возникает вопрос: можно ли получить прибыль, одновременно торгуя рисками? Эта проблема решается на основе теоремы Борча о классе обменов, оптимальных по Парето. При этом допустимы два нестандартных решения. Идея первого – использовать совместный потенциал, имеющий смысл наибольшей суммы, которая может быть изъята из системы n компаний без ущемления какой-либо из них. Затем эта сумма перераспределяется между компаниями определенным способом. Второй идеей, предложенной Х. Бюльманом (1980, 1984), является рассмотрение конкурентного равновесия, в котором случайные платежи имеют рыночный характер. Здесь плотность вероятностей равновесной цены играет ключевую роль. С ее помощью можно определять стоимость опционов посредством плотности вероятностей равновесной цены. Этот подход отличается от подходов, в которых рассматривается полезность потребления и предполагается существование репрезентативных агентов.

Как было уже сказано, не всегда адекватно измерять полезность денег денежной шкалой. Чтобы объяснить некоторые явления, полезность денег следует измерять с помощью другой шкалы. С этой целью введем понятие *полезности* («*моральной стоимости*») суммы денег x с помощью функции $u(x)$. Обычно x является богатством или прибылью лица, принимающего решение.

Предположим, что *функция полезности* $u(x)$ имеет два основных свойства:

1) $u(x)$ является возрастающей функцией x;
2) $u(x)$ является вогнутой функцией x.

Если предположить, что функция $u(x)$ дважды дифференцируемая, тогда из свойств 1 и 2 следует, что $u'(x) > 0$ и $u''(x) < 0$.

Первое свойство означает очевидное требование: чем больше, тем лучше. Существует несколько причин, чтобы потребовать наличие второго свойства. Во-первых, оно подтверждает требование, чтобы предельная полезность $u'(x)$ была убывающей функцией богатства x или чтобы приращение полезности $u(x + g) - u(x)$, проистекающее от увеличения денежной суммы на g, было убывающей функцией богатства x.

Пример 2.1. *Экспоненциальная функция полезности* (параметр функции полезности, $a > 0$)

$$u(x) = (1 - \exp\{- ax\})/a, \quad - \infty < x < + \infty. \tag{2.1}$$

Заметим, что для $x \to + \infty$ полезность ограничена и стремится к предельному значению $1/a$.

Пример 2.2. *Степенная функция полезности первого рода* (параметры $s > 0$, $c > 0$)

$$u(x) = \frac{s^{c+1} - (s - x)^{c+1}}{(c + 1)s^c}, \quad x < s. \tag{2.2}$$

Очевидно, что выражение (2.2) не может быть моделью полезности за пределами $x = s$. Единственный способ расширения этого определения за пределы значения $x = s$, чтобы функция $u(x)$ была неубывающей и вогнутой, – установить ее равной $u(x) = s/(c + 1)$ для всех $x \geq s$. Тогда s можно интерпретировать как уровень насыщения: максимальная полезность достигается уже при конечном богатстве s. Частный случай $c = 1$ имеет специальный интерес. В этом случае

$$u(x) = x - x^2/2s, \quad x < s, \tag{2.3}$$

является *квадратичной функцией полезности*.

Пример 2.3. *Степенная функция полезности второго рода* (параметр $c > 0$). Для $c \neq 1$ определим

$$u(x) = \frac{x^{1-c} - 1}{1 - c}, \quad x > 0. \tag{2.4}$$

Для $c = 1$ установим

$$u(x) = \ln x, \quad x > 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что (2.5) является пределом (2.4) при $c \to 1$.

Заметим, что всякая функция полезности $u(x)$ может быть заменена эквивалентной функцией полезности вида

$$\tilde{u}(x) = Au(x) + B, \tag{2.6}$$

где $A > 0$, а B – произвольное.

Следовательно, можно стандартизовать функции полезности, например, потребовав, чтобы

$$u(\xi) = 0, \;\; u'(\xi) = 1 \tag{2.7}$$

для конкретной точки ξ. Для функций (2.1) и (2.2) это может быть сделано при $\xi = 0$, а для функции (2.3) – при $\xi = 1$.

Если в примере 2.1 мы перейдем к пределу при $\alpha \to 0$ или устремим $s \to +\infty$ в примере 2.2, то получим $u(x) = x$, линейную функцию полезности, которая превращается в вырожденную функцию полезности в соответствующем смысле (шкала полезности превращается в денежную шкалу). Аналогично пределом при $c \to 0$ в примере 2.3 оказывается функция $u(x) = x - 1$.

В последующем неявно будем предполагать, что $x < s$, если $u(x)$ – степенная функция полезности первого рода, и что $x > 0$, если $u(x)$ является степенной функцией полезности второго рода. Аналогичные предположения делаем, когда рассматриваем полезность случайных величин.

С заданной одним из перечисленных выше способов функцией полезности $u(x)$ будем ассоциировать функцию

$$q(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{d \ln u'(x)}{dx}, \tag{2.8}$$

называемую *функцией неприятия риска* (*risk aversion function*). Заметим, что согласно свойствам 1 и 2 имеет место неравенство $q(x) > 0$. Обратимся к примерам, рассмотренным выше.

Для экспоненциальной функции полезности (2.1) (параметр $a > 0$) получаем функцию (2.8) следующего вида:

$$q(x) = a, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2.9}$$

Таким образом, экспоненциальная функция полезности дает постоянное неприятие риска.

Для степенной функции полезности первого рода (параметры функции $s > 0$, $c > 0$) получаем

$$q(x) = c/(s - x), \quad x < s. \tag{2.10}$$

Здесь неприятие риска возрастает с богатством и становится неограниченным при $x \to s$. Это имеет следующую интерпретацию: если богатство близко к уровню насыщения s, увеличение количества денег приводит к очень малой полезности; отсюда нет причины иметь какой-либо риск.

Для степенной функции полезности второго рода (когда параметр функции $c > 0$) получим, что

$$q(x) = c/x, \quad x > 0. \tag{2.11}$$

Здесь неприятие риска является убывающей функцией богатства, которое может быть типичным для некоторых инвесторов.

Если $u(x)$ заменяется на эквивалентную функцию полезности (2.6), ассоциированная функция неприятия риска остается такой же. Обратно, если зададим функцию неприятия риска $q(x)$ и захотим найти лежащую в основе функцию полезности, то найдем, что для функции $u(x)$ имеет место дифференциальное уравнение

$$u''(x) + q(x)u'(x) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение имеет двухпараметрическое семейство решений. Чтобы получить единственное решение, мы можем принять стандартизацию, согласно требованиям (2.7), для некоторого ξ. Тогда решением будет следующая функция:

$$u(x) = \int_{\xi}^{x} \exp\left(-\int_{\xi}^{z} q(y)dy \right) dz.$$

Теперь предположим, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ являются двумя функциями неприятия риска, причем

$$q_1(x) \le q_2(x) \text{ для всех } x. \tag{2.12}$$

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ будут двумя лежащими в основе функциями полезности. Из-за неоднозначности их нельзя сравнивать без принятия каких-либо дополнительных предположений. Однако если предположить, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ стандартизованы в одной и той же точке ξ, т. е.

$$u_i(\xi) = 0, \; u_i'(\xi) = 1, \; i = 1, 2,$$

тогда последует, что $u_1(x) \ge u_2(x)$ для всех x.

Для доказательства этого заметим, что

$$u_i(x) = \int_{\xi}^{x} \exp\left[-\int_{\xi}^{z} q_i(y)dy \right] dz, \text{ если } x > \xi,$$

$$u_i(x) = -\int_{x}^{\xi} \exp\left[\int_{z}^{\xi} q_i(y)dy \right] dz, \text{ если } x < \xi,$$

и используем предположение (2.12).

§ 2. УПОРЯДОЧЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНВЕСТИЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДОХОДАМИ

Рассмотрим действия инвестора с начальным богатством w, который может выбирать между определенным числом инвестиционных проектов со случайными отдачами. С помощью функции полезности два проекта со случайными отдачами можно сравнивать непосредственно: инвестор предпочитает проект с G_1 проекту с G_2, если

$$E[u(w + G_1)] > E[u(w + G_2)], \tag{2.13}$$

т. е. если ожидаемая полезность проекта с G_1 превышает ожидаемую полезность проекта с G_2. Когда ожидаемые полезности одинаковы, инвестору будет безразлично, какой проект выбирать. Таким образом, полностью определяется порядок предпочтения между множеством инвестиционных проектов со случайной отдачей.

Если умножить неравенство (2.13) на положительную константу A и прибавить константу B к обеим частям неравенства, то получим неравенство относительно функции $\tilde{u}(x)$, эквивалентное (2.13). Следовательно, функции $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$ определяют один и тот же порядок предпочтений и считаются эквивалентными.

Пример 2.4. Предположим, что инвестор использует экспоненциальную функцию полезности с параметром a и имеет выбор между проектами с нормально распределенными величинами G_1 и G_2, причем $E[G_i] = \mu_i$, $\text{var}[G_i] = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$. Поскольку

$$E[e^{-aG_i}] = \exp\{-a\mu_i + a^2\sigma_i^2/2\},$$

то

$$E[u(w + G_i)] = [1 - \exp\{-aw - a\mu_i + a^2\sigma_i^2/2\}]/a.$$

Таким образом, G_1 предпочтительнее, чем G_2, если удовлетворяется (2.13), т. е. если

$$\mu_1 - a\sigma_1^2/2 > \mu_2 - a\sigma_2^2/2.$$

По неравенству Иенсена имеем, что для любых случайных величин G

$$u(w + E[G]) > E[u(w + G)]. \tag{2.14}$$

Следовательно, если инвестор может выбирать между проектами со случайной отдачей G и детерминированной отдачей, равной математическому ожиданию $E[G]$, он предпочтет последний. Это дает нам следующее определение: *детерминированный эквивалент* π, ассоциированный с G, определяется условием, что инвестору безразлично, получать случайную отдачу G или фиксированную сумму π. Математически это условие записывается в виде

$$u(w + \pi) = E[u(w + G)]. \tag{2.15}$$

Из (2.14) видим, что $\pi < E[G]$. Рассмотрим два примера, в которых можно получить явные выражения для π.

Для экспоненциальной функции полезности детерминированный эквивалент равен

$$\pi = -\ln E[e^{-aG}]/a.$$

Заметим, что он не зависит от размера богатства w. Путем разложения этого выражения в степенной ряд по a мы получим простую аппроксимацию

$$\pi \approx E[G] - a\mathrm{var}[G]/2, \tag{2.16}$$

справедливую для достаточно малых значений a.

Для квадратической функции полезности (2.3) условие (2.15) приводит к квадратному уравнению для π. Его решение можно записать следующим образом:

$$\pi = E[G] - (s - w - E[G])\lambda, \text{ где } \lambda = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{var}[G]}{(s - w - E[G])}} - 1.$$

Для больших значений s можно разложить квадратный корень и найти приближение

$$\pi \approx E[G] - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{var}[G]}{(s - w - E[G])}.$$

Используя равенство (2.10), эту формулу можно представить как

$$\pi \approx E[G] - q(w + E[G])\mathrm{var}[G]/2,$$

которая аналогична формуле (2.16).

Для функции полезности общего вида из определения (2.15) имеем равенство

$$\pi = u^{-1}(E[u(w + G)]) - w.$$

Если G является отдачей с «малым» риском, имеет место следующая более явная аппроксимация:

$$\pi \approx E[G] - q(w + E[G])\mathrm{var}[G]/2. \tag{2.17}$$

Чтобы уточнить значение этого соотношения, обозначим

$$G_z = \mu + zV, \;\; z > 0,$$

где μ является константой, а V – случайная величина с $E[V] = 0$ и $\mathrm{var}[V] = E[V^2] = \sigma^2$. Отсюда $E[G_z] = \mu$ и $\mathrm{var}[G_z] = z^2\sigma^2$.

Пусть $\pi(z)$ будет детерминированным эквивалентом G_z, определяемым уравнением

$$u(w + \pi(z)) = E[u(w + G_z)]. \tag{2.18}$$

Идеей является разложить функцию $\pi(z)$ в степенной ряд по z:

$$\pi(z) = a + bz + cz^2 + \dots . \tag{2.19}$$

Если в (2.18) положить $z = 0$, то

$$u(w + a) = u(w + \mu), \;\; \text{или } a = \mu. \tag{2.20}$$

Продифференцировав (2.18) по z, получим

$$\pi'(z)\, u'(w + \pi(z)) = E[V\, u'(w + G_z)]. \tag{2.21}$$

Подстановка $z = 0$ дает

$$bu'(w + \mu) = E[V]\, u'(w + \mu), \;\; \text{или } \; b = 0. \tag{2.22}$$

Наконец, продифференцировав равенство (2.21), получим

$$\pi''(z)u'(w + \pi(z)) + [\pi'(z)]^2u''(w + \pi(z)) = E[V^2u''(w + G_z)].$$

Подставляя в это равенство $z = 0$, находим

$$2cu'(w + \mu) = E[V^2]u''(w + \mu),$$

или

$$c = \frac{1}{2}\frac{u''(w+\mu)}{u'(w+\mu)}\sigma^2 = -\,q(w + \mu)\sigma_2^2/2. \qquad (2.23)$$

Подстановка выражений (2.20), (2.22) и (2.23) в разложение (2.19) дает аппроксимацию

$$\pi(z) \approx \mu - q(w + \mu)\, z^2\sigma_2^2/2 = E[G_z] - q(w + E[G_z])\mathrm{var}[G_z]/2,$$

что уточняет формулу (2.17).

Теперь рассмотрим две функции полезности $u_1(x)$ и $u_2(x)$ такие, что

$$q_1(x) \le q_2(x) \text{ для всех } x,$$

и пусть π_1 и π_2 обозначают соответствующие им детерминированные эквиваленты. Тогда можно ожидать, что

$$\pi_1 \ge \pi_2. \qquad (2.24)$$

Чтобы проверить это соотношение, примем, что лежащие в основе функции полезности стандартизованы в некоторой точке $\xi = w + \pi_1$. Тогда

$$u_1(x) \ge u_2(x) \text{ для всех } x.$$

Отсюда и из определения π_1 и π_2 следует, что

$$0 = u_2(w + \pi_1) = u_1(w + \pi_1) = E[u_1(w + G)] \ge E[u_2(w + G)] = u_2(w + \pi_2).$$

Так как u_2 является возрастающей функцией, неравенство (2.24) действительно имеет место.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ К СТРАХОВАНИЮ

Рассмотрим страховую компанию с начальным богатством w. Компания должна застраховать риск и обязуется оплатить иск S (случайная величина) в конце периода. Какой должна быть соответствующая премия P в этом контракте? Ответ можно получить, если постулировать справедливость в терминах полезности и определить функцию полезности $u(x)$. Это означает, что ожидаемая полезность богатства, если *заключить контракт*, должна быть равна полезности в случае, когда *контракт не заключается*:

$$E[u(w + P - S)] = u(w). \tag{2.25}$$

Такой подход называется *принципом эквивалентной полезности*. Уравнение (2.25) определяет P единственным образом, но оно в общем случае не имеет явного решения. Исключение составляют случаи, когда $u(x)$ является экспоненциальной, при этом

$$P = \ln E[e^{aS}]/a, \tag{2.26}$$

или квадратичной, когда

$$P = E[S] + (s - w)\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{var}[S]}{(s - w)^2}}\right\}. \tag{2.27}$$

Если S является «малым» риском, можно найти приближенное решение уравнения (2.25):

$$P \approx E[S] + q(w)\mathrm{var}[S]/2$$

(чтобы увидеть это, достаточно положить $S = \mu + zV$ с $E[V] = 0$ и разложить P по степеням z).

Во многих случаях более реалистично то предположение, что богатство – случайная величина W и не зависит от заключения контракта. Тогда P получаем из уравнения

$$E[u(W + P - S)] = E[u(W)].$$

Заметим, что теперь P определяется совместным распределением случайных величин W и S.

Обратимся к рассмотрению примеров, в которых премия P может быть вычислена в явной форме.

Пример 2.5. Если $u(x) = (1 - \exp\{-ax\})/a$, находим

$$P = \frac{1}{a}\ln\frac{E[e^{a(S-W)}]}{E[e^{-aW}]}. \tag{2.28}$$

Если a мало, можем разложить это выражение по степеням a и получить аппроксимацию

$$P \approx E[S] + a\mathrm{var}[S - W]/2 - a\mathrm{var}[W]/2 =$$

$$= E[S] + a\mathrm{var}[S]/2 - a\mathrm{cov}[S, W]. \tag{2.29}$$

Заметим, что формула (2.28) сводится к выражению (2.26) в случае, если W и S – независимые случайные величины. Заметим также, что аппроксимация (2.29) является точным решением в случае, когда W и S составляют двухмерную нормально распределенную случайную величину.

Пример 2.6. Если $u(x) = x - x^2/2s$, тогда

$$P = E[S] + (s - E[W])\lambda, \tag{2.30}$$

где

$$\lambda = 1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{var}[S] - 2\mathrm{cov}[S, W]}{(s - E[W])^2}}.$$

Заметим, что это выражение сводится к формуле (2.27) с заменой $E[W]$ на w в случае, когда W и S – некоррелированные случайные величины. Для больших значений s решение (2.30) допускает аппроксимацию

$$P \approx E[S] + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{var}[S] - 2\mathrm{cov}[S, W]}{(s - E[W])} =$$

$$= E[S] + q\,(E[W])\{\mathrm{var}\,[S] - 2\mathrm{cov}\,[S, W]\}/2.$$

Рассмотрим страховую компанию, которая должна заплатить общую сумму исков S (случайная величина) своим клиентам в конце года. Рассмотрим два соглашения.

1. *Контракт «стоп-лосс»* с удержанием d. При этом компания берет на себя выплату исков, если их общая сумма $S \le d$. В случае нарушения этого равенства сумму $S - d$ выплачивает перестраховочная компания. Выплаты перестраховочной компании в конце года определяются формулой

$$(S - d)_+ = \begin{cases} S - d, & \text{если} \quad S \ge d, \\ 0, & \text{если} \quad S < d. \end{cases}$$

2. *Общий страховой контракт*, задаваемый функцией $h(x)$, когда страховщик выплачивает сумму $h(S)$ в конце года. На функцию $h(x)$ накладывается единственное ограничение: $0 \le h(x) \le x$.

Пусть эти два контракта сравнимы в том смысле, что ожидаемые платежи перестраховщика одинаковые, т. е.

$$E[(S - d)_+] = E[h(S)]. \tag{2.31}$$

Кроме того, сделаем удобное (но, может быть, нереалистичное) предположение, что обе перестраховочные премии одинаковые. Тогда в терминах полезности контракт «стоп-лосс» более предпочтителен, т. е.

$$E[u(w + h(S) - S)] \le E[u(w + (S - d)_+ - S)]. \qquad (2.32)$$

В этом контексте w представляет богатство перестраховочной компании, включая полученную премию.

Доказательство (2.32) начнем с замечания, что вогнутая кривая лежит под касательной к ней, т. е.

$$u(y) \le u(x) + u'(x)(y - x) \text{ для всех } x \text{ и } y. \qquad (2.33)$$

Используя это соотношение для $y = w + h(S) - S$, $x = w + (S - d)_+ - S$, получаем

$$u(w + h(S) - S) \le u(w + (S - d)_+ - S) +$$

$$+ u'(w + (S - d)_+ - S)(h(S) - (S - d)_+) \le$$

$$\le u(w + (S - d)_+ - S) + u'(w - d)(h(S) - (S - d)_+). \qquad (2.34)$$

Для проверки второго неравенства рассмотрим два случая: $S > d$, когда неравенство очевидно выполняется, и $S \le d$, для которого

$$u'(w + (S - d)_+ - S)(h(S) - (S - d)_+) = u'(w - S)h(S) \le$$

$$\le u'(w - d)h(S) = u'(w - d)(h(S) - (S - d)_+).$$

Вычисляя математическое ожидание выражения (2.34) и используя равенство (2.31), получаем неравенство (2.32).

Снова рассмотрим страховую компанию, которая в конце года должна выплатить случайную сумму денег S. Эта компания может приобрести пропорциональное перестраховочное прикрытие. Если P является перестраховочной премией для всего прикрытия (естественно, $P > E[S]$), предположим, что в конце года премией φP прикрывается доля φS всей суммы ($0 \le \varphi \le 1$). Тогда $\tilde{\varphi}$, оптимальное значение φ, будет величиной, которая максимизирует

$$E[u(w - \varphi P - (1 - \varphi)S)],$$

где $u(x)$ – соответствующая функция полезности и где начальное богатство w включает полученные премии.

В частном случае, когда $u(x)$ является экспоненциальной функцией полезности с параметром a, а S имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2, вычисления могут быть сделаны в аналитической форме. Теперь ожидаемая полезность

$$(1 - E\{\exp[-aw + a\varphi P + a(1 - \varphi)S]\})/a =$$

$$= \exp[-aw + a\varphi P + a(1 - \varphi)\mu + a^2\sigma^2(1 - \varphi)^2/2]/a.$$

Она максимальна при

$$1 - \tilde{\varphi} = (P - \mu)/a\sigma^2. \qquad (2.35)$$

Этот результат имеет привлекательную интерпретацию. Оптимальная остающаяся доля пропорциональна надбавке, которая содержится в премии перестрахования для полного прикрытия, и обратно пропорциональна неприятию риска компанией и дисперсии полного иска.

В финансах формула, аналогичная (2.35), известна как отношение Мертона (см. Panjer et al., 1998, гл. 4). Отличие состоит в том, что для формулы Мертона функция полезности степенная, а S распределено логарифмически нормально, в то время как здесь функция полезности экспоненциальная, а S распределено нормально.

§ 4. ОБМЕН РИСКАМИ, ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ПАРЕТО

Рассмотрим n компаний (или агентов). Предположим, что компания i имеет богатство W_i в конце года и основывает свои решения на функции полезности $u_i(x)$. Здесь $W_1, \ldots, W_n$ – случайные величины с известной совместной функцией распределения. Обозначим общее богатство компаний через $W = W_1 + \ldots + W_n$. Обмен рисками предусматривает перераспределение общего богатства. Таким образом, после обмена рисками богатство компании i будет X_i; здесь величины $X_1, \ldots, X_n$ могут быть случайными, но такими, чтобы общее богатство оставалось тем же:

$$X_1 + \ldots + X_n = W.$$

Значение такого обмена для компании i измеряется величиной $E[u_i(X_i)]$. Говорят, что обмен рисками $(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n)$ является *оптимальным по Парето*, если невозможно улучшить положение одной компании без ухудшения положения хотя бы одной другой компании. То есть не имеется никакого другого обмена (X_1, …, X_n), удовлетворяющего системе неравенств

$$E[u_i(X_i)] \geq E[u_i(\widetilde{X}_i)] \quad \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Причем, по крайней мере, одно неравенство выполняется строго. Если компании желают кооперироваться, они должны выбирать обмен рисками, оптимальный по Парето.

Оптимальные по Парето обмены не единственные, а составляют семейство обменов риска с (n – 1) параметрами. Такое семейство может быть получено следующим методом. Выберем $k_1 > 0$, …, $k_n > 0$ и затем максимизируем выражение

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\, E[u_i(X_i)], \tag{2.36}$$

где максимум вычисляется по всем обменам рисками (X_1, …, X_n). Эта задача имеет относительно простое решение.

Теорема 2.1 (Borch). Обмен рисками $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ максимизирует выражение (2.36), если и только если случайные величины $k_i u_i'(\widetilde{X}_i)$ одинаковы для всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. а) Предположим, что $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ максимизирует (2.36). Пусть $j \neq h$ и V будет произвольной случайной величиной. Определим $X_i = \widetilde{X}_i$ для $i \neq j, h$; $X_j = \widetilde{X}_j + tV$; $X_h = \widetilde{X}_h - tV$, где t является параметром. Пусть

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, E[u_i(X_i)]. \tag{2.37}$$

В соответствии с нашим предположением функция $f(t)$ имеет максимум при $t = 0$. Следовательно, $f'(t) = 0$, или

$$k_j E[V u_j'(\widetilde{X}_j)] - k_h E[V u_h'(\widetilde{X}_h)] = 0.$$

Полезно переписать полученное равенство как

$$E[V\{ k_j u_j'(\widetilde{X}_j) - k_h u_h'(\widetilde{X}_h)\}] = 0.$$

Так как оно имеет место для произвольных V, то

$$k_j u_j'(\widetilde{X}_j) - k_h u_h'(\widetilde{X}_h) = 0.$$

Поскольку j и h выбирались произвольно, величина $k_i u_i'(\widetilde{X}_i)$ не зависит от i.

б) Обратно, пусть $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ – такой обмен рисками, что

$$k_i u_i'(\widetilde{X}_i) = \Lambda \tag{2.38}$$

является одной и той же случайной величиной для всех i.

Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ будет любым другим обменом рисками. Из (2.33) следует, что

$$u_i(X_i) \le u_i(\widetilde{X}_i) + u_i'(\widetilde{X}_i)(X_i - \widetilde{X}_i).$$

Если умножить это неравенство на k_i, просуммировать по i и использовать равенство (2.38), то получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(X_i) \le \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(\widetilde{X}_i) + \Lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \widetilde{X}_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(\widetilde{X}_i).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i E[u_i(X_i)] \le \sum_{i=1}^{n} k_i E[u_i(\widetilde{X}_i)],$$

откуда видно, что обмен рисками $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ в действительности максимизирует выражение (2.37).

Пример 2.7. Предположим, что все компании используют экспоненциальную функцию полезности $u_j(x) = (1 - \exp\{-a_j x\})/a_j$, где a_j является константой неприятия риска компанией j, $j = 1, \ldots, n$. Из (2.38) получаем

$$k_j \exp(-a_j \widetilde{X}_j) = \Lambda$$

или

$$\widetilde{X}_j = -\ln\Lambda/a_j + \ln k_j/a_j. \tag{2.39}$$

Суммируя по j, получаем уравнение для определения Λ:

$$W = -\left(\sum_{j=1}^{n} 1/a_j\right) \ln\Lambda + \sum_{j=1}^{n} \ln k_j/a_j. \tag{2.40}$$

Введем величину a с помощью равенства

$$1/a = \sum_{i=1}^{n} 1/a_j,$$

тогда из уравнения (2.40) следует, что

$$-\ln\Lambda = aW - a\sum_{j=1}^{n}\ln k_j / a_j.$$

Подстановка в равенство (2.39) дает

$$\widetilde{X}_i = \frac{a}{a_i}W + \frac{\ln k_i}{a_i} - \frac{a}{a_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln k_j}{a_j} \qquad (2.41)$$

для $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, компания i будет принимать долю (квоту) $q_i = a/a_i$ общего богатства W плюс, возможно, отрицательный дополнительный платеж

$$d_i = \frac{\ln k_i}{a_i} - \frac{a}{a_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln k_j}{a_j}.$$

Легко проверить, что

$$q_1 + \ldots + q_n = 1 \text{ и } d_1 + \ldots + d_n = 0.$$

Заметим, что q_i обратно пропорциональны коэффициентам неприятия риска и что они одинаковы для всех обменов рисками, оптимальных по Парето. Оптимальные по Парето обмены рисками отличаются только своими дополнительными платежами.

Пример 2.8. Теперь предположим, что все компании используют степенную функцию полезности первого рода такую, что

$$u_j(x) = \frac{s_j^{\,c+1} - (s_j - x)^{c+1}}{(c+1)s_j^{\,c}}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где s_j является уровнем установления для компании j.

Из равенства (2.38) получим

$$k_j(1 - \widetilde{X}_j/s_j)^c = \Lambda$$

или

$$\widetilde{X}_j = -(s_j/k_j^{1/c})\Lambda^{1/c} + s_j. \qquad (2.42)$$

Суммируя по j, получаем уравнение для определения Λ:

$$W = -\left(\sum_{j=1}^{n} s_j \Big/ k_j^{1/c}\right)\Lambda^{1/c} + \sum_{j=1}^{n} s_j. \qquad (2.43)$$

Пусть

$$s = s_1 + \ldots + s_n$$

обозначает объединенный уровень установления. Тогда из уравнения (2.43) следует, что

$$\Lambda^{1/c} = (s - W) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{k_j^{1/c}} .$$

Подстановка этого выражения в формулу (2.42) дает

$$\widetilde{X}_i = \frac{\dfrac{s_i}{k_i^{1/c}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{s_j}{k_j^{1/c}}} W + s_i - \frac{\dfrac{s_i}{k_i^{1/c}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{s_j}{k_j^{1/c}}} s$$

для $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, снова $\widetilde{X}_i$ имеет вид $\widetilde{X}_i = q_i W + d_i$. Однако теперь как квоты, так и дополнительные платежи изменяются и поэтому $d_i = s_i - q_i s$.

Если написать этот результат в форме

$$s_i - \widetilde{X}_i = q_i (s - W), \tag{2.44}$$

тогда возможна следующая его интерпретация. Выражение $(s_i - \widetilde{X}_i)$ – это сумма, недостающая для максимального удовлетворения. Она является фиксированным процентом от $(s - W)$ – полной суммы, недостающей для всего объединения компаний.

Пример 2.9. Рассмотрим n инвесторов с одинаковыми функциями полезности второго рода

$$u_j(x) = \frac{x^{1-c} - 1}{1-c}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из равенства (2.38) видно, что

$$k_j \widetilde{X}_j^{-c} = \Lambda, \text{ т. е. } \widetilde{X}_j = k_j^{1/c} \Lambda^{-1/c}. \tag{2.45}$$

Суммирование по j дает

$$W = \sum_{j=1}^{n} k_j^{1/c} \Lambda^{-1/c}, \text{ или } \Lambda^{-1/c} = W \Big/ \sum_{j=1}^{n} k_j^{1/c}.$$

Если подставить это выражение в равенство (2.45), то получим, что

$$\tilde{X}_i = q_i W, \tag{2.46}$$

где $q_i = k_i^{1/c} \Big/ \sum_{j=1}^{n} k_j^{1/c}$.

Следовательно, каждый инвестор принимает фиксированную квоту полного богатства. Как и в случае степенной функции полезности первого рода, квоты изменяются, но теперь нет никаких дополнительных платежей.

Пример 2.10. Рассмотрим случай двух компаний, $n = 2$. Предположим, что $u_1(x) = x$, а $u_2(x) = u(x)$ – функция полезности в собственном смысле с $u''(x) < 0$. Тогда условие (2.38) превращается в следующее: $k_1 = k_2 u_2'(\tilde{X}_2)$. Но это означает, что $\tilde{X}_2$ – константа, скажем, равная d. Тогда $\tilde{X}_1 = W - d$. Этот результат в действительности, не удивителен, так как первая компания восприимчива к риску. Она будет принимать весь риск.

Мы представили примеры, в которых оптимальные по Парето обмены рисками имеют исключительно простой вид. В общем случае это не так. Следующий пример иллюстрирует это.

Пример 2.11. Пусть $n = 2$. Предположим, что функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются степенными функциями полезности второго рода с параметрами $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$, т. е. $u_1(x) = \ln x$, $u_2(x) = 1 - 1/x$ для $x > 0$.

Из равенства (2.38) получаем условие

$$\tilde{X}_1 / k_1 = (\tilde{X}_2)^2 / k_2.$$

Вместе с условием, что $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 = W$, это приводит к квадратному уравнению. Его решение имеет вид

$$\tilde{X}_1 = W - [\sqrt{a^2 + 4aW} - a]/2, \quad \tilde{X}_2 = [\sqrt{a^2 + 4aW} - a]/2,$$

где $a = k_2/k_1$. Здесь $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ являются, очевидно, нелинейными функциями богатства W.

Пример 2.7 помогает понять общие свойства оптимальных по Парето обменов рисками. Пусть $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ – произвольные функции полезности, а $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ – оптимальный по Парето обмен рисками.

Для заданного $W = w$ обмен $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ максимизирует выражение (2.36). Следовательно, $\widetilde{X}_i = \widetilde{X}_i(w)$ – функция общего богатства w. Пусть $j \neq h$. Согласно теореме 2.1,

$$k_j u_j'[\widetilde{X}_j(w)] = k_h u_h'[\widetilde{X}_h(w)]. \qquad (2.47)$$

Дифференцирование этого равенства по w дает

$$k_j u_j''[\widetilde{X}_j(w)]\frac{d\widetilde{X}_j}{dw} = k_h u_h''[\widetilde{X}_h(w)]\frac{d\widetilde{X}_h}{dw}. \qquad (2.48)$$

Разделив левую и правую части равенства (2.48) на соответствующие части равенства (2.47), получим

$$q_j[\widetilde{X}_j(w)]\frac{d\widetilde{X}_j}{dw} = q_h[\widetilde{X}_h(w)]\frac{d\widetilde{X}_h}{dw}.$$

Отсюда и из того, что

$$d\widetilde{X}_1 + \ldots + d\widetilde{X}_n = dw,$$

следует соотношение

$$d\widetilde{X}_j = \frac{\dfrac{1}{q_j(\widetilde{X}_j)}}{\sum\limits_{h=1}^{n}\dfrac{1}{q_h(\widetilde{X}_h)}}\,dw, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (2.49)$$

Таким образом, семейство оптимальных по Парето обменов риска может быть получено следующим способом. Для любого конкретного $w = w_0$ можем выбрать $\widetilde{X}_1(w_0), \ldots, \widetilde{X}_n(w_0)$. Тогда $\widetilde{X}_1(w), \ldots, \widetilde{X}_n(w)$ определяется как решение дифференциального уравнения (2.49) с граничным условием $w = w_0$.

В качестве иллюстрации применения (2.49) обратимся к примерам 2.8 и 2.9. Для унификации анализа предположим, что

$$q_j(x) = (\alpha x + \beta_j)^{-1}, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (2.50)$$

Мы хотим проверить, что оптимальный по Парето обмен рисками имеет вид

$$\widetilde{X}_i = q_i W + d_i, \qquad (2.51)$$

или, что эквивалентно,

$$d\widetilde{X}_j = q_i dw \tag{2.52}$$

для набора квот $q_1, \ldots, q_n$ и дополнительных платежей $d_1, \ldots, d_n$. Из соотношений (2.49) и (2.50) получаем

$$d\widetilde{X}_j = \frac{\alpha\widetilde{X}_j + \beta_j}{\sum_{h=1}^{n}(\alpha\widetilde{X}_h + \beta_h)}\, dw = \frac{\alpha\widetilde{X}_j + \beta_j}{\alpha W + \beta}\, dw,$$

где $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Отсюда с помощью обмена (2.51) находим, что

$$d\widetilde{X}_j = \frac{\alpha q_j W + \alpha d_j + \beta_j}{\alpha W + \beta}\, dw. \tag{2.53}$$

Чтобы убедиться, что равенство (2.52) справедливо, нам нужно показать, что дробь в выражении (2.53) равна q_i. Рассмотрим два случая:

1) если $\beta \neq 0$, для этого нужно, чтобы $q_i = (\alpha d_i + \beta_i)/\beta$, $i = 1, \ldots, n$;

2) если $\beta = 0$, тогда $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные квоты, а дополнительные платежи определяются равенствами $d_i = -\beta_i/\alpha$, $i = 1, \ldots, n$.

В теореме 2.1 фактически утверждается, что для оптимального по Парето обмена рисками $(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n)$ имеется случайная величина Λ такая, что

$$\Lambda = k_i u_i'(\widetilde{X}_i) \quad \text{для } i = 1, \ldots, n. \tag{2.54}$$

Так как $\widetilde{X}_i = \widetilde{X}_i(w)$ является функцией общего богатства w, из этого следует, что $\Lambda = \Lambda(w)$ также будет функцией w. Дифференцирование равенств (2.54) дает

$$\Lambda' = k_i u_i''(\widetilde{X}_i)\, \widetilde{X}_i'.$$

Деление левой и правой частей этого равенства соответственно на левую и правую части равенства (2.54) и использование формулы (2.49) позволяют получить соотношение

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = -\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{q_h(\widetilde{X}_h)}\right)^{-1}. \tag{2.55}$$

Равенство (2.55) показывает, что Λ является убывающей функцией полного богатства.

Совместный потенциал

Снова рассмотрим n страховых компаний и предположим, что исходный набор $W_1, \ldots, W_n$, т. е. распределение их полного богатства W, не является оптимальным по Парето. На сколько увеличат свой доход компании при кооперации?

Ответ может быть получен с помощью *совместного потенциала* (*synergy potential*) η. Он измеряется наибольшей суммой x, которая может быть извлечена из системы без ущемления какой-либо из компаний, т. е. так, чтобы после обмена рисками при условии

$$X_1 + \ldots + X_n = W - x$$

величины $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяли неравенствам

$$E[u_i(X_i)] \geq E[u_i(W_i)] \quad \text{для } i = 1, \ldots, n. \tag{2.56}$$

Ясно, что для $x = \eta$ мы должны иметь равенство в соотношении (2.56) и обмен рисками $X_1, \ldots, X_n$ должен быть оптимальным по Парето для $W - \eta$.

Пример 2.12 (продолжение примера 2.7). Предположим, что все функции полезности экспоненциальные. Так как $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n$ является оптимальным по Парето обменом рисками для богатства $W - \eta$, из (2.41) следует, что

$$\widetilde{X}_i = \frac{a}{a_i}(W - \eta) + d_i \quad \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Затем мы используем условие (2.56) в виде равенств

$$E[u_i(\widetilde{X}_i)] = E[u_i(W_i)],$$

откуда видно, что

$$E[e^{-aW}] \exp\{a\eta - a_i d_i\} = E[e^{-a_i W_i}],$$

или

$$\frac{a}{a_i}\eta - d_i = \frac{1}{a_i}\ln E[e^{-a_i W_i}] - \frac{1}{a_i}\ln E[e^{-aW}].$$

Суммирование по i дает явное выражение для совместного потенциала:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ln E[e^{-a_i W_i}] - \frac{1}{a} \ln E[e^{-aW}] = \ln \frac{\prod_{i=1}^{n} E[e^{-a_i W_i}]^{1/a_i}}{E[e^{-aW}]^{1/a}}. \qquad (2.57)$$

Пример 2.13 (продолжение примера 2.8). Предположим, что компании используют степенную функцию полезности первого рода. В соответствии с равенством (2.44)

$$s_i - \tilde{X}_i = q_i (s - W + \eta).$$

Из $E\,[u_i(\tilde{X}_i)] = E\,[u_i(w_i)]$ теперь следует, что

$$q_i^{\,c+1} E[(s - W + \eta)^{c+1}] = E[(s_i - W_i)^{c+1}].$$

Извлечение корня степени $(c + 1)$ и суммирование по i дает

$$E[(s - W + \eta)^{c+1}]^{1/(c+1)} = \sum_{i=1}^{n} E\,[(s_i - W_i)^{c+1}]^{1/(c+1)}. \qquad (2.58)$$

Это равенство является уравнением для совместного потенциала η.

Пример 2.14 (продолжение примера 2.9). Предположим, что каждый из инвесторов имеет степенную функцию полезности второго рода. Поэтому

$$\tilde{X}_i = q_i(W - \eta).$$

Из $E[u_i(\tilde{X}_i)] = E[u_i(W_i)]$ получаем

$$q_i^{\,1-c} E[(W - \eta)^{1-c}] = E[(W_i)^{1-c}], \quad \text{если } c \neq 1, \qquad (2.59)$$

и

$$\ln q_i + E[\ln(W - \eta)] = E[\ln W_i], \quad \text{если } c = 1. \qquad (2.60)$$

Извлекая корень степени $(1 - c)$ в равенстве (2.59) и суммируя по i, получаем уравнение для определения совместного потенциала η в случае $c \neq 1$:

$$E[(W - \eta)^{1-c}]^{1/(1-c)} = \sum_{i=1}^{n} E[(W_i)^{1-c}]^{1/(1-c)}. \qquad (2.61)$$

Аналогично из равенства (2.60) получим уравнение для η в случае $c = 1$:

$$\exp\{E[\ln(W - \eta)]\} = \sum_{i=1}^{n} \exp\{E[\ln W_i]\}. \qquad (2.62)$$

Пример 2.15. В примере 2.10 равенство ожидаемых полезностей приводит к тому, что

$$\tilde{X}_1 = W - E[W_2] \text{ и } \tilde{X}_2 = d,$$

где d определяется из уравнения $u(d) = E[u(W_2)]$.

Таким образом, $d = \pi$, детерминированному эквиваленту W_2. Отсюда следует, что

$$\eta = W - (\tilde{X}_1 + \pi) = E\,[W_2] - \pi.$$

Мы можем использовать совместный потенциал для построения конкретного оптимального по Парету обмена рисками. Идея состоит в том, чтобы извлечь η из общего богатства компаний и затем распределить его между компаниями согласно соотношению (2.49). Результирующий оптимальный по Парето обмен рисками $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n$ для богатства W характеризуется условием

$$E\{u_i[\tilde{X}_i(W - \eta)]\} = E[u_i(W_i)] \quad \text{для } i = 1, \ldots, n. \qquad (2.63)$$

Пример 2.16 (продолжение примера 2.12). В случае экспоненциальных функций полезности имеем $\tilde{X}_i = a(W - \eta)/a_i + d_i$.

Чтобы определить дополнительные платежи, подставим это выражение в равенство (2.63) и получим

$$E[e^{-aW}]\exp\{a\eta - a_i d_i\} = E[e^{-a_i W_i}].$$

Из этого следует, что

$$d_i = \frac{a}{a_i}\eta - \frac{1}{a_i}\ln E[e^{-a_i W_i}] + \frac{1}{a_i}\ln E[e^{-aW}].$$

Подставляя в эту формулу значение η в виде (2.57), получаем окончательный результат:

$$d_i = \frac{a}{a_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\ln E[e^{-a_j W_j}] - \frac{1}{a_i}\ln E[e^{-a_i W_i}] \quad \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2.17. Для степенных функций полезности первого рода мы нашли, что оптимальный по Парето обмен рисками $(\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n)$ таков, что $s_i - \widetilde{X}_i = q_i(s - W)$. Отсюда и из условия (2.63) получаем равенство

$$q_i^{c+1} E[(s - W + \eta)^{c+1}] = E[(s_i - W_i)^{c+1}].$$

Таким образом,

$$q_i = \left(\frac{E[(s_i - W_i)^{c+1}]}{E[(s - W + \eta)^{c+1}]} \right)^{1/(c+1)}.$$

Наконец, чтобы окончательно получить явную формулу для квоты, используем уравнение (2.58):

$$q_i = \frac{E[(s_i - W_i)^{c+1}]^{1/(c+1)}}{\sum_{j=1}^{n} E[(s_j - W_j)^{c+1}]^{1/(c+1)}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2.18. Для степенных функций полезности второго рода найдено, что $\widetilde{X}_i = q_i W$. Из равенства (2.63) видно, что

$$q_i = \left(\frac{E[(W_i)^{1-c}]}{E[(W - \eta)^{1-c}]} \right)^{1/(1-c)}, \quad \text{если } c \neq 1,$$

и

$$q_i = \frac{\exp\{E[\ln W_i]\}}{\exp\{E[\ln(W - \eta)]\}}, \quad \text{если } c = 1.$$

Из уравнений (2.61) и (2.62) следует, что

$$q_i = \frac{E[(W_i)^{1-c}]^{1/(1-c)}}{\sum_{j=1}^{n} E[(W_j)^{1-c}]^{1/(1-c)}}, \quad \text{если } c \neq 1,$$

и

$$q_i = \frac{\exp\{E[\ln W_i]\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{E[\ln W_j]\}}, \quad \text{если } c = 1.$$

§ 5. РЫНОК И РАВНОВЕСИЕ

Снова рассмотрим n компаний, которые были введены в § 4. Будем считать, что компаниям следовало бы осуществить оптимальный по Парето обмен рисками. Поскольку такие обмены составляют широкое семейство, желательно более определенное решение. В § 4 были предложены конкретные варианты оптимальных по Парето обменов рисками. Здесь рассмотрим предложенный К. Борчем и Х. Бюльманом другой подход, который основан на экономических идеях.

Предположим, что случайные платежи производятся на рынке, причем цена $H(Y)$ любого платежа Y (случайная величина) вычисляется следующим образом:

$$H(Y) = E[\Psi Y]. \tag{2.64}$$

Здесь Ψ является положительной случайной величиной. Предположим, что $H(Y)$ представляет собой цену в конце года. Тогда цена детерминированного платежа должна быть константой. Поэтому мы должны иметь $E[\Psi] = 1$. Перепишем правую часть равенства (2.64) в виде $E[Y] + E[\Psi Y] - E[\Psi]E[Y]$, тогда следует, что цена платежа Y может быть записана как

$$H(Y) = E[Y] + \mathrm{cov}(\Psi, Y), \tag{2.65}$$

т. е. цена платежа равна его математическому ожиданию, модифицированному с учетом рыночных условий. С другой стороны, мы можем интерпретировать цену платежа как его математическое ожидание относительно модифицированной вероятностной меры Q, которая определяется соотношением

$$E_Q(Y) = E[\Psi Y] \text{ для всех } Y. \tag{2.66}$$

Другими словами, Ψ есть производная Радона – Никодима меры Q относительно исходной вероятностной меры. По этой причине Бюльман (1980) назвал Ψ *плотностью цены* (*price density*).

Компания i будет стремиться купить платеж Y_i для того, чтобы максимизировать

$$E[u_i(W_i + Y_i - H(Y_i))]. \tag{2.67}$$

Платеж $\widetilde{Y}_i$ является решением этой задачи, если и только если удовлетворяется условие

$$u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)) = \Psi E[u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i))]. \tag{2.68}$$

Чтобы показать необходимость этого условия, предположим, что $\widetilde{Y}_i$ является решением уравнения (2.67). Пусть V будет произвольной случайной величиной. Рассмотрим параметрическое семейство величин $\{Y_i \mid Y_i = \widetilde{Y}_i - tV\}$ с параметром t. Согласно нашим предположениям, функция $f(t) = E[u_i(W_i + Y_i - H(Y_i))]$ принимает свое максимальное значение в точке $t = 0$. Следовательно,

$$f'(0) = E\{u_i'[W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)](V - E[\Psi V])\} = 0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$E\,[V\,\{u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)) - \Psi E[u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i))]\}] = 0.$$

Так как оно справедливо для всех V, выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю, из чего следует условие (2.68).

Чтобы показать достаточность условия (2.68), рассмотрим платеж $\widetilde{Y}_i$, который удовлетворяет условию (2.68), и любой другой платеж Y_i. Из неравенства (2.33) следует, что

$$u_i(W_i + Y_i - H(Y_i)) \le u_i(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)) +$$

$$+ u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i))(Y_i - H(Y_i) - \widetilde{Y}_i + H(\widetilde{Y}_i)) = u_i(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)) +$$

$$+ \Psi\, E[u_i'(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i))](Y_i - H(Y_i) - \widetilde{Y}_i + H(\widetilde{Y}_i)).$$

Вычисление математического ожидания и использование определения H позволяют написать

$$E[u_i(W_i + Y_i - H(Y_i))] \le E[u_i(W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i))],$$

что завершает доказательство.

Заметим, что оптимальное $\widetilde{Y}_i$ – единственное с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, разность $\widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)$ будет единственной. Ее можно интерпретировать как оптимальный платеж, который имеет нулевую цену, и в дальнейшем будем называть ее *чистой потребностью* (*net demand*) компании i.

При заданном Ψ случайная величина

$$\sum_{i=1}^{n}[\widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i)] \qquad (2.69)$$

является *избыточным потреблением* (*excess demand*). Компании могут максимизировать одновременно свои ожидаемые полезности, если только избыточное потребление становится равным нулю, что эквивалентно *условию рыночного клиринга* (*market clearing condition*). Это приводит к следующему определению.

Плотность цены Ψ и платежи $\{\widetilde{Y}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ составляют *равновесие* (*equilibrium*), если величина (2.69) обращается в нуль и условие (2.68) удовлетворяется для всех $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, равновесие порождает обмен рисками $(\widetilde{X}_1,\ldots, \widetilde{X}_n)$ такой, что

$$\widetilde{X}_i = W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда условие (2.68) устанавливает, что

$$u_i'(\widetilde{X}_i) = \Psi\, E[u_i'(\widetilde{X}_i)], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.70}$$

Из условия теоремы 2.1 следует, что обмен рисками, порождаемый равновесием, оптимальный по Парето. Заметим также, что равенство (2.70), по существу, эквивалентно определению (2.54), а значит, равенство (2.55) удовлетворяется при $\Lambda = \Psi$. В частности, это показывает, что Ψ – убывающая функция общего богатства.

Обратное справедливо в следующем смысле. Предположим, что распределение $W_1, \ldots, W_n$ уже оптимально по Парето. Тогда $W_1, \ldots, W_n$ и Ψ составят равновесие, если определить

$$\Psi = u_i'(\widetilde{X}_i)/E[u_i'(\widetilde{X}_i)].$$

Причем $\widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Это можно получить из формулы (2.38) (если заменить $\widetilde{X}_i$ на W_i) и условия (2.68).

Пример 2.19 (продолжение примера 2.7). Предполагая, что все компании используют экспоненциальные функции полезности, мы заключаем из (2.68), что

$$\widetilde{Y}_i = - W_i - (\ln\Psi)/a_i + k_i,$$

где k_i является константой.

Следовательно, чистая потребность компании i равна

$$\widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i) = -W_i - (\ln\Psi)/a_i + E[\Psi W_i] + E[\Psi\ln\Psi]/a_i.$$

При равновесии сумма по i должна быть равна нулю. Поэтому

$$0 = -W + E[\Psi \ln \Psi]/a + k,$$

где k является константой.

Так как $E[\Psi] = 1$, отсюда следует, что равновесная плотность цены

$$\Psi = e^{-aW}/E\,[e^{-aW}]. \qquad (2.71)$$

Наконец, несложный расчет показывает, что в равновесии

$$\widetilde{X}_i = W_i + \widetilde{Y}_i - H(\widetilde{Y}_i) = aW/a_i + E[\Psi W_i] - aE[\Psi W]/a_i =$$

$$= aW/a_i + H(W_i) - aH(W)/a_i.$$

Пример 2.20 (продолжение примера 2.8). Предположим, что компании используют степенные функции полезности первого рода. Поэтому $u_i'(x) = (s_i - x)^c \big/ s_i^c$, $i = 1, \ldots, n$, и из равенства (2.44)

$$s_i - \widetilde{X}_i = q_i(s - W), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда, согласно условию (2.70), равновесная плотность цен

$$\Psi = u_i'(\widetilde{X}_i)/E[u_i'(\widetilde{X}_i)] = (s - W)^c/E[(s - W)^c]. \qquad (2.72)$$

Равновесные квоты лучшего всего определять из условия, что $H(W_i) = H(\widetilde{X}_i)$, или

$$H(W_i) = H(s_i - q_i(s - W)) = s_i - q_i s + q_i H(W).$$

Следовательно,

$$q_i = \frac{s_i - H(W_i)}{s - H(W)} = \frac{E[\Psi(s_i - W_i)]}{E[\Psi(s - W)]}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2.21 (продолжение примера 2.9). Если все компании используют одинаковые степенные функции полезности второго рода

$$u_i'(x) = x^{-c}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

тогда из формул (2.46) $\widetilde{X}_i = q_i W$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда равновесная плотность цен

$$\Psi = u_i'(\widetilde{X}_i)/E[u_i'(\widetilde{X}_i)] = W^{-c}/E\,[W^{-c}]. \qquad (2.73)$$

В этом случае равновесные квоты лучше всего находить из условия $H(W_i) = H(\widetilde{X}_i) = q_i H(W)$. Таким образом,

$$q_i = \frac{H(W_i)}{H(W)} = \frac{E[\Psi W_i]}{E[\Psi W]} = \frac{E[W^{-c} W_i]}{E[W^{-c+1}]}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из равенства (2.65) следует, что для случайной величины Y

$$H(Y) - E(Y) = \beta(H(W) - E(W)), \qquad (2.74)$$

где

$$\beta = \mathrm{cov}(Y, \Psi)/\mathrm{cov}(W, \Psi),$$

а Ψ – равновесная плотность цен. Формула (2.74) близка к основному результату широко известной рыночной модели ценообразования (CAPM, *Capital Asset Pricing Model*). В качестве иллюстрации мы обратимся к трем предшествующим примерам. В этом случае для примера 2.19 имеем

$$\beta = \mathrm{cov}(Y, e^{-aW})/\mathrm{cov}(W, e^{-aW});$$

для примера 2.20

$$\beta = \mathrm{cov}(Y, (s - W)^c)/\mathrm{cov}(W, (s - W)^c); \qquad (2.75)$$

для примера 2.21

$$\beta = \mathrm{cov}(Y, W^{-c})/\mathrm{cov}(W, W^{-c}).$$

Заметим, что при $c = 1$ (квадратичная функция полезности) формула (2.75) сводится к классической формуле CAPM:

$$\beta = \mathrm{cov}(Y, W)/\mathrm{var}[W].$$

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

При рыночном равновесии цена платежа Y равна $H(Y)$ и определяется по формулам (2.64), (2.65) и (2.66), где Ψ – равновесная плотность цен. Обычно случайная величина Y является стоимостью актива (*asset*) или финансовой производной (*derivative security*) в конце периода. При определенных предположениях цена финансовой производной может быть выражена через цену лежащего в основе актива (*underlying asset*).

Сначала предположим, что случайная величина Ψ имеет логнормальное распределение, т. е.

$$\Psi = e^Z,$$

где Z имеет нормальное распределение, например, с дисперсией v^2.

Так как

$$E[\Psi] = \exp\{E[Z] + v^2/2\}$$

должно быть равно 1, отсюда следует, что $E[Z] = -v^2/2$. В соответствии с формулами (2.71) – (2.73) предположение логарифмической нормальности Ψ означает, что в примере 2.19 величина W нормальная, в примере 2.21 логнормальная, а в примере 2.20 величина $(s - W)$ логнормальная.

Рассмотрим конкретный актив. Обозначим его стоимость в конце периода через S и предположим, что случайная величина S имеет логнормальное распределение. Тогда можно написать $S = s_0e^R$, где s_0 является наблюдаемой ценой актива в начале периода и R имеет нормальное распределение, скажем, со средним μ и дисперсией σ^2.

Предположим, что совместное распределение (Z, R) – двухмерное нормальное с коэффициентом корреляции ρ. Тогда для производящей функции моментов R относительно меры Q получим следующее выражение:

$$E_Q[e^{tR}] = E[\Psi e^{tR}] = E[e^{Z+tR}] = \exp\{t(\mu + \rho v\sigma) + t^2\sigma^2/2\}.$$

Это показывает, что относительно меры Q распределение R остается нормальным с той же дисперсией σ^2 и новым средним $\mu_Q = \mu + \rho v\sigma$.

К счастью, можно выписать более подходящее с практической точки зрения выражение для μ_Q. Так как s_0 является ценой актива в начале периода, то

$$s_0 = e^{-r}H(S) = e^{-r}E_Q[S], \qquad (2.76)$$

где r – безрисковая процентная ставка.

Отсюда получаем уравнение

$$s_0 = e^{-r}s_0E_Q[e^R] = e^{-r}s_0\exp\{\mu_Q + \sigma^2/2\},$$

которое дает

$$\mu_Q = r - \sigma^2/2. \qquad (2.77)$$

Теперь рассмотрим ФП, стоимость которой в конце периода равна $f(S)$, функции цены лежащего в основе актива. Цена актива в начале периода

$$e^{-r}H(f(S)) = e^{-r}E_Q[f(s_0e^R)], \tag{2.78}$$

где R нормально распределено со средним (2.77) и дисперсией σ^2. Например, для европейского опциона-колл с ценой исполнения K функция $f(S) = (S - K)_+$. Тогда выражение (2.78) может быть вычислено в явном виде, что приводит к формуле Блэка – Шоулса.

Описанный метод можно обобщить, чтобы определять цены финансовых производных, которые зависят от нескольких, скажем m, активов. Пусть

$$S_i = s_{i0}e^{R_i}$$

обозначает стоимость актива i в конце периода, где s_{i0} является наблюдаемой ценой актива i в начале периода, $i = 1, \ldots, m$. Теперь предположим, что $(Z, R_1, \ldots, R_m)$ имеет многомерное совместное нормальное распределение. Тогда относительно меры Q многомерное распределение $(R_1,\ldots,R_m)$ останется нормальным с неизменной ковариационной матрицей, но вектор средних станет другим, таким, что

$$E_Q[R_i] = r - \mathrm{var}[R_i]/2, \; i = 1, \ldots, m.$$

В контексте примеров 2.19–2.21 практические результаты можно также получить для финансовых производных на активы, для которых S является линейной функцией W.

В примере 2.19 предположим, что $S = qW$. Тогда

$$E_Q[S] = \frac{E[Se^{-aW}]}{E[e^{-aW}]} = \frac{E[Se^{-\alpha S}]}{E[e^{-\alpha S}]},$$

где $\alpha = a/q$. Согласно равенству (2.76), значение α определяется из условия

$$\frac{E[Se^{-\alpha S}]}{E[e^{-\alpha S}]} = e^r s_0. \tag{2.79}$$

Тогда цена финансовой производной с платежом $f(S)$ определяется выражением

$$e^{-r}E_Q[f(S)] = e^{-r}\frac{E[f(S)e^{-\alpha S}]}{E[e^{-\alpha S}]}. \tag{2.80}$$

Описанный подход – это метод Эсшера. Заметим, что он работает также для активов, когда S и $(W - S)$ – независимые случайные величины. В этом случае

$$E_Q[S] = \frac{E[Se^{-aS}e^{-a(W-S)}]}{E[e^{-aS}e^{-a(W-S)}]} =$$

$$= \frac{E[Se^{-aS}]E[e^{-a(W-S)}]}{E[e^{-aS}]E[e^{-a(W-S)}]} = \frac{E[Se^{-aS}]}{E[e^{-aS}]}.$$

Следовательно, a определяется из равенства (2.79), где α заменяется на a.

В примере 2.20 предположим, что $S = q(s - W)$. Тогда

$$E_Q[S] = \frac{E[S(s-W)^c]}{E[(s-W)^c]} = \frac{E[SS^c]}{E[S^c]}.$$

Значение c определяется из условия, что

$$\frac{E[S^{1+c}]}{E[S^c]} = e^r s_0, \tag{2.81}$$

и цена финансовой производной с платежом $f(S)$ определяется выражением

$$e^{-r}E_Q[f(S)] = e^{-r}\frac{E[f(S)S^c]}{E[S^c]}. \tag{2.82}$$

В примере 2.21 мы снова предположим, что $S = qW$. Тогда

$$E_Q[S] = \frac{E[SW^{-c}]}{E[W^{-c}]} = \frac{E[SS^{-c}]}{E[S^{-c}]}.$$

Значение c теперь определяем из условия

$$\frac{E[S^{1-c}]}{E[S^{-c}]} = e^r s_0, \tag{2.83}$$

и цена финансовой производной с платежом $f(S)$ находится по формуле

$$e^{-r}E_Q[f(S)] = e^{-r}\,\frac{E[f(S)S^{-c}]}{E[S^{-c}]}. \tag{2.84}$$

Выражение (2.82) также допустимо, если c, решение уравнения (2.81), отрицательное. В рассматриваемом случае решение уравнения (2.83) является положительным, что приводит к равенству (2.84). Но это снова выражение (2.82) с отрицательным c. Формулы (2.81) и (2.82) составляют метод Эсшера (см. ч. 1, гл. 6).

Метод Эсшера имеет ряд привлекательных особенностей. Например, если цена S распределена логнормально, то она распределена логнормально и по мере Q. В частности, в этом случае воспроизводится формула Блэка – Шоулса.

Используя условие (2.79), равенство (2.80) можно переписать как

$$e^{-r}E_Q[f(S)] = s_0\,\frac{E[f(S)e^{-\alpha S}]}{E[Se^{-\alpha S}]}.$$

Аналогично можно переписать и уравнение (2.82):

$$e^{-r}E_Q[f(S)] = s_0\,\frac{E[f(S)S^{c}]}{E[S^{1+c}]}.$$

Может показаться удивительным, что r в этих выражениях для цен не появляется, однако величины α и c зависят от r.

Теория полезности имеет важное применение при конструировании оптимальных портфелей, т. е. портфелей, которые максимизируют ожидаемую полезность инвестора. Эта проблема рассматривалась в § 5 и § 6. Рассмотрим инвестора с богатством w в момент времени 0 и функцией полезности $u(x)$, который определяет терминальное богатство в момент времени T. Пусть $r > 0$ обозначает безрисковую процентную ставку. На финансовом рынке можно покупать случайные платежи. Их цена задается через плотность вероятностей цен Ψ. Таким образом, цена (в момент времени 0) платежа Y (в момент времени T) равна $e^{-rT}E[\Psi Y]$. Если инвестор покупает Y, то его богатство в момент времени T будет равным

$$W_T = we^{rT} + Y - E[\Psi Y]. \tag{2.85}$$

Задача состоит в таком выборе Y, который максимизирует $E[u(W_T)]$. По аналогии с условием (2.68) решение характеризуется условием

$$u'(W_T) = \Psi\ E[u'(W_T)],$$

где W_T определяется формулой (2.85).

Для функций полезности примеров 2.1–2.3 можно получить явные выражения для величины оптимального терминального богатства. Для экспоненциальной функции полезности $u'(x) = e^{-ax}$, а оптимальное терминальное богатство

$$W_T = we^{rT} + E[\Psi\ln\Psi]/a - (\ln\Psi)/a. \qquad (2.86)$$

Для степенной функции полезности первого рода $u'(x) = (1 - x/s)^c$, $x < s$, получим

$$W_T = s - \frac{s - we^{rT}}{E[\Psi^{1+1/c}]}\Psi^{1/c}, \qquad (2.87)$$

и для степенной функции полезности второго рода $u'(x) = x^{-c}$ результатом будет выражение

$$W_T = \frac{we^{rT}}{E[\Psi^{1-1/c}]}\Psi^{-1/c}. \qquad (2.88)$$

Заметим, что W_T является решением *статической* задачи оптимизации. Если сделать соответствующие дополнительные предположения о рынке, можно определить оптимальную стратегию инвестирования, т. е. *динамическую* стратегию, которая воспроизводит оптимальное терминальное богатство W_T. В разделе 10.6 книги H. Panjer et al. (1998) предполагается, что два актива продаются (покупаются) в непрерывном времени, инвестиция безрисковая (которая зарабатывает с постоянной ставкой r) и акции, не выплачивающие дивиденды, имеют цену $S(t)$, $0 \le t \le T$. Мы сделаем классическое предположение о том, что $\{S(t)\}$ – геометрическое броуновское движение, т. е.

$$S(t) = S(0)e^{X(t)},$$

где $\{X(t)\}$ является винеровским процессом с параметрами μ и σ^2, а при нейтральной к риску мере Q – с параметрами $\mu^* = r - \sigma^2/2$ и σ^2.

Тогда

$$\Psi = e^{\alpha T}(S(T)/S(0))^{h^*}, \quad h^* = (\mu^* - \mu)/\sigma^2, \tag{2.89}$$

где α является таким, чтобы $E(\Psi) = 1$.

Заметим, что параметр h^* определяется как значение параметра Эсшера h, для которого дисконтированный процесс цены акции является мартингалом после преобразования меры (см. ч. 1, гл. 6). Сначала напомним результат, касающийся такого самофинансирующего портфеля, который воспроизводит платеж ФП европейского типа. Рассмотрим европейскую ФП с датой погашения T и функцией платежа $\Pi(z)$; т. е. в момент времени T должна быть сделана выплата $\Pi(S(T))$. Пусть $V(z, t)$ – цена платежа в момент t, а $\eta(z, t)$ – сумма, инвестированная в акции в воспроизводящем портфеле в момент времени t, если $S(t) = z$. Хорошо известно (см., например, книгу H. Panjer et al., 1998), что

$$\eta(z, t) = z\partial V(z, t)/\partial z. \tag{2.90}$$

Обратимся теперь к трем упомянутым выше примерам. Из выражений (2.86) и (2.89) получим

$$W_T = we^{rT} + E[\Psi\ln\Psi]/a - \alpha T/a - (h^*/a)\ln S(T) + (h^*/a)\ln S(0). \tag{2.91}$$

Рассмотрим европейскую ФП с датой погашения T и функцией платежа

$$\Pi(z) = we^{rT} + E[\Psi\ln\Psi]/a - \alpha T/a - (h^*/a)\ln z.$$

Выплата отличается от W_T только константой $(h^*/a)\ln S(0)$. Поскольку w является начальной ценой W_T, отсюда следует, что

$$V(z, 0) = w - e^{-rT}(h^*/a)\ln z.$$

Следовательно, ввиду свойства (2.90) начальная сумма, инвестируемая в акцию, должна быть равна $\eta(z, 0) = -e^{-rT}(h^*/a)$. Аналогично в момент времени t сумма, инвестируемая в акции в воспроизводящем портфеле, равна

$$-e^{-r(T-t)}(h^*/a) = e^{-r(T-t)}(\mu^* - \mu)/(a\sigma^2), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.92}$$

Для степенной функции первого рода из соотношений (2.87) и (2.89) получаем, что оптимальное терминальное богатство

$$W_T = s - \frac{s - we^{rT}}{E[\Psi^{1+1/c}]} e^{\alpha T/c} \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right)^{h^*/c}.$$

Теперь рассмотрим европейскую ФП с терминальной датой T и функцией платежа

$$\Pi(z) = \frac{s - we^{rT}}{E[\Psi^{1+1/c}]} e^{\alpha T/c} z^{h^*/c}.$$

Заметим, что

$$\Pi[S(T)] = (s - W_T)\, S(0)^{h^*/c}. \tag{2.93}$$

Отсюда следует, что начальная цена финансовой производной

$$V(z, 0) = (se^{-rT} - w) z^{h^*/c}$$

с $S(0) = z$. Тогда, согласно (2.90), будем иметь

$$\eta(z, 0) = (h^*/c)(se^{-rT} - w) z^{h^*/c}. \tag{2.94}$$

Чтобы определить воспроизводящий портфель для W_T, перепишем (2.93) в виде

$$W_T = s - \Pi[S(T)]\, S(0)^{-h^*/c}.$$

Отсюда сумма, инвестированная в акции в момент времени 0, должна быть равной $-\eta(S(0), 0)\, S(0)^{-h^*/c}$, что с учетом равенства (2.94) упрощается к выражению

$$-(h^*/c)(se^{-rT} - w).$$

Аналогично в момент времени t сумма, инвестированная в акции воспроизводящего портфеля, равна

$$-(se^{-r(T-t)} - W_t)(h^*/c) = (se^{-r(T-t)} - W_t)(\mu^* - \mu)/(c\sigma^2), \tag{2.95}$$

где W_t – богатство в момент времени t, постоянная доля которого отсутствует для полного удовлетворения.

Для степенной функции второго рода оптимальное терминальное богатство

$$W_T = \frac{we^{rT}}{E[\Psi^{1-1/c}]} e^{-\alpha T/c} \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right)^{-h^*/c}.$$

На этот раз рассмотрим европейскую ФП с датой истечения T и функцией платежа

$$\Pi(z) = \frac{we^{rT}}{E[\Psi^{1-1/c}]} e^{-\alpha T/c} z^{-h^*/c}.$$

В момент времени 0 цена ФП равна $V(z, 0) = wz^{-h^*/c}$. Отсюда по формуле (2.90) имеем $\eta(z, 0) = -(h^*/c)V(z, 0)$. Для портфеля, воспроизводящего W_T, сумма, инвестированная в акции, равна той же постоянной доле полного богатства, т. е. $-(h^*/c)w$ в момент времени 0, а в момент времени t

$$-(h^*/c)W_t = W_t(\mu - \mu^*)/(c\sigma^2). \tag{2.96}$$

На первый взгляд, выражения (2.92), (2.95) и (2.96) сильно различаются. Однако они могут быть написаны в одинаковой форме: во всех трех случаях оптимальная торговая стратегия состоит в инвестировании в момент времени t, $0 \le t \le T$, в акции суммы

$$\frac{\mu - \mu^*}{\sigma^2 q(e^{r(T-t)}W_t)} e^{-r(T-t)}, \tag{2.97}$$

где q является функцией неприятия риска. Проверить это можно с помощью формул (2.9)–(2.11).

Эти результаты можно обобщить на случай $n \ge 2$ различных типов находящихся в продаже акций. Пусть $S_k(t)$ обозначает цену акции типа k. Предположим, что $\{S_1(t), \ldots, S_n(t)\}$ является n-мерным геометрическим броуновским движением с параметрами дрейфа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ($\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*$ при нейтральной к риску вероятностной мере) и ковариациями σ_{ik}. Предполагается, что ковариационная матрица имеет обратную матрицу с элементами τ_{ik}. Тогда можно определить следующее обобщение выражения (2.89):

$$\Psi = e^{\alpha T} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{S_k(T)}{S_k(0)} \right)^{h_k^*}, \quad h_k^* = \sum_{i=1}^{n} (\mu^* - \mu)\tau_{ik}$$

(см. ч. 1, гл. 6, § 5), и снова α выбирается таким, чтобы $E[\Psi] = 1$. В соответствии с (2.86)–(2.88) оптимальное терминальное богатство для экспоненциальной функции полезности

$$W_T = we^{rT} + \frac{1}{a}E[\Psi\ln\Psi] - \frac{\alpha T}{a} - \sum_{k=1}^{n}\frac{h_k^*}{a}\ln S_k(T) + \sum_{k=1}^{n}\frac{h_k^*}{a}\ln S_k(0),$$

для степенной функции полезности первого рода

$$W_T = s - \frac{s - we^{rT}}{E[\Psi^{1+1/c}]}e^{\alpha T/c}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{S_k(T)}{S_k(0)}\right)^{h_k^*/c},$$

для степенной функции полезности второго рода

$$W_T = \frac{we^{rT}}{E[\Psi^{1-1/c}]}e^{-\alpha T/c}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{S_k(T)}{S_k(0)}\right)^{-h_k^*/c}.$$

В каждом из этих случаев можно сопоставить оптимальное терминальное богатство с выплатой по соответствующим образом выбранной европейской ФП. Такая выплата может быть воспроизведена с помощью динамического портфеля, в котором сумма η_k инвестируется в акции типа k в момент времени t. Обозначим цену такого портфеля в момент времени t посредством $V(z_1, \ldots, z_n, t)$ при условии, что $S_k(t) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\eta_k(z_1, \ldots, z_n, t) = z_k\partial V(z_1, \ldots, z_n, t)/\partial z_k,\ \ k = 1, \ldots, n.$$

Портфель, который воспроизводит W_T, является оптимальной инвестиционной стратегией. Для экспоненциальной функции полезности получается, что сумма

$$-e^{-r(T-t)}(h_k^*/a) \tag{2.98}$$

должна быть инвестирована в акции типа k в момент времени t. Для степенной функции полезности первого рода соответствующая сумма равна

$$-(se^{-r(T-t)} - W_t)(h_k^*/c),$$

а для степенной функции полезности второго рода сумма, инвестируемая в акции типа k в момент времени t, равна

$$-(h_k^*/c)\,W_t. \tag{2.99}$$

Выражения (2.98) и (2.99) можно переписать в одинаковой форме. Теперь оптимальная торговая стратегия состоит в инвестировании суммы

$$-\frac{h_k^*}{q(e^{r(T-t)}W_t)}\quad e^{-r(T-t)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\mu_i^*)\tau_{ik}}{q(e^{r(T-t)}W_t)}\quad e^{-r(T-t)} \tag{2.100}$$

в акции типа k в момент времени t. Отсюда следует, что полная сумма, инвестированная в акции в момент времени t, равна

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\mu_i^*)\tau_{ik}}{q(e^{r(T-t)}W_t)}\quad e^{-r(T-t)}. \tag{2.101}$$

Поэтому в любой момент времени сумма, инвестируемая в акции типа k, должна быть постоянной долей

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\mu_i^*)\tau_{ik}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\mu_i^*)\tau_{ik}}$$

от полной суммы, инвестируемой в акции. Заметим, что эта доля не зависит от функции полезности. Если разделить выражения (2.97), (2.100) или (2.101) на W_t, получаются отношения Мертона, которые означают, что инвестор со степенной функцией полезности второго рода использует пропорциональную стратегию инвестирования в активы. Этот результат был получен Мертоном с помощью более сложной техники, основанной на уравнении Беллмана. Мертон также показал, что инвестор с экспоненциальной функцией полезности в рисковый актив инвестировал бы постоянную сумму.

ГЛАВА
3

РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕН АКТИВОВ

§ 1. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОИМОСТИ

Рассмотрим общую равновесную модель стоимости активов, предназначенную для использования в прикладных исследованиях. Важной особенностью модели является то, что она дает возможность объединения реального и финансового рынков. Кроме того, модель *эндогенно* (*endogenously*), т. е. вследствие внутренних причин, определяет случайный процесс, которому следуют равновесные цены на любые финансовые активы, и показывает, как этот процесс зависит от основных реальных переменных. Модель полностью совместима с реальными ожиданиями и оптимизацией поведения определенной части участников рынка.

Принятые предположения являются достаточно общими и позволяют включить многие из основных факторов, оказывающих влияние на рынок активов. Хотя модель достаточно проста, она обеспечивает получение конкретных результатов, которые можно проверить эмпирически. Наряду с этим ее можно расширить во многих направлениях. Поэтому она удобна для широкого круга приложений. Например, в гл. 4 эта модель будет использована для разработки теории временной структуры процентных ставок.

Многие литературные источники посвящены различным аспектам определения цен активов. Материал этой главы излагается соответственно работе Дж. Кокса, Дж. Ингерсолла и С. Росса (Cox, Ingersoll, Ross, 1985). Наиболее близкими к этому подходами являются работы по динамическому определению цен активов Р. Мертона (Merton, 1973) и Р. Лукаса (Lucas, 1978). Принимая время непрерывным, Мертон получает соотношение между ожидаемыми равновесными доходностями активов. Он показывает, что, когда возможности инвестиций все время изменяются случайно, это соотношение будет включать эффекты, аналогов которым нет в статистической однопериодной модели. Лукас рассматривает экономику с однородными индивидуумами и единственным товаром потребления, для производства которого требуется несколько процессов. Выход этих процессов случайный, определяется внешними причинами, т. е. *экзогенно* (*exogenously*), и не является постоянным. Активы определяются как иски ко всем доходам экономического процесса или к их части, а цены активов – из равновесия.

Теория, представленная здесь, строится на некоторых элементах названных работ. Как и Мертон, мы сформулируем нашу модель в непрерывном времени и используем все преимущества, которые это обеспечивают. Экономическая структура модели несколько похожа на ту, с которой работает Лукас. Однако здесь учитывается как эндогенность (*endogenous*) продукции, так и случайные технологические изменения. Таким образом, допускается, что случайно изменяющиеся возможности инвестирования могут быть применены в описываемой модели и могут играть важную роль в получаемых результатах.

Вначале разрабатывается модель и характеризуется равновесная процентная ставка, а также средняя доходность активов. Затем будет представлено основное уравнение определения стоимости и его решение интерпретировано несколькими способами; показана взаимосвязь модели с моделью Эрроу – Дебрю (Arrow – Debrue) и обсуждена роль фирм. В завершение приводится несколько заключительных замечаний и обсуждаются возможности обобщения результатов.

Модель общего равновесия разрабатывается в простой экономической постановке. Для построения модели экономики используются следующие предположения.

Предположение 3.1. Только один физический товар может быть потреблен или инвестирован. Все стоимости измеряются в единицах этого товара.

Мы рассматриваем идеализированную модель роста капитала, предполагая, что трудовые ресурсы не обязательно вводить в описание производства (неявно предполагая, что оно не нуждается в них, так как их имеется с избытком). Это приводит к более целеустремленной постановке задач, которыми мы будем заниматься. Для распространения анализа на задачу с трудовыми ресурсами и нелинейными технологиями имеются лишь несущественные трудности.

Предположение 3.2. Производственные возможности состоят из ряда линейных операций. Преобразование инвестиции вектора η количества товаров в n производственных процессов управляется системой стохастических дифференциальных уравнений вида

$$d\eta(t) = I_\eta \alpha(Y, t)dt + I_\eta G(Y, t)dw(t), \tag{3.1}$$

где I_η – диагональная матричная функция от векторной переменной η, диагональный элемент которой является i-й компонентой η; Y – k-мерный вектор переменных состояния, изменение которых будет кратко описано ниже; $\alpha(Y, t) = [\alpha_i(Y, t)]$ – ограниченный n-мерный вектор, являющийся функцией от Y и t; $G(Y, t) = [g_{ij}(Y, t)]$ – ограниченная матрица размерности $n \times (n + k)$, являющаяся функцией Y и t; $w(t)$ – винеровский процесс размерности $(n + k)$ в пространстве R^{n+k}. Матрица ковариации физических ставок доходности на производственные процессы GG' положительно определена.

При описании вероятностной структуры экономики неявно будем подразумевать исходное вероятностное пространство $\{\Omega, B, P\}$. Здесь Ω является множеством, B есть σ-алгебра подмножеств из Ω и P является вероятностной мерой на B. Пусть $[t, t']$ будет временным интервалом и M – полным сепарабельным метрическим пространством. Под стохастическим процессом $z(t)$ будет пониматься функция, отображающая $[t, t'] \times \Omega$ в M, такая, что $z(t)$ является измеримым относительно B и σ-алгебры борелевских подмножеств из M. В качестве M принимаем пространство R^n, n-мерное евклидово пространство. Говорят, что процесс $z(t)$ непрерывный, если его возможные реализации, т. е. выборочные траектории, непрерывны с вероятностью единица. Процесс w с вещественными значениями на $[t, t']$ будет винеровским процессом, если: 1) $w(t)$ есть непрерывный процесс и 2) $w(s) - w(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $(s - t)$. Процесс является n-мерным винеровским процессом, если его компоненты – независимые одномерные винеровские процессы.

Стохастические дифференциальные уравнения, используемые в анализе, понимаются следующим образом. Пусть $x(t)$ – m-мерный стохастический процесс, который удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений

$$dx = a(x, t)dt + B(x, t)dw(t),$$

где $a(x, t)$ есть m-вектор-столбец; $B(x, t)$ – $(m \times m)$-матричная функция; $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс. Решение этой системы с начальным состоянием $x(t)$ является решением системы интегральных уравнений

$$x(s) = x(t) + \int_t^s a(x(u), u)\,du + \int_t^s B(x(u), u)\,dw(u),$$

где последний интеграл определяется формулой Ито.

Предположим, что a и B измеримы на $[t, t'] \times R^m$ и удовлетворяют следующим условиям роста и Липшица.

1. Существует константа k_1 такая, что для всех (x, s) из $[t, t'] \times R^m$

$$|a(x, s)| \le k_1(1 + |x|) \quad \text{и} \quad |B(x, s)| \le k_1(1 + |x|).$$

2. Для ограниченных подмножеств $Q \subset R^m$ имеется константа k_2, возможно, зависящая от Q, и s, такая, что для всех $x, y \in Q$ и $t \le s \le t'$

$$|a(x, s) - a(y, s)| \le k_2 |x - y|,$$

$$|B(x, s) - B(y, s)| \le k_2 |x - y|.$$

Подробности по всем проблемам стохастических дифференциальных уравнений можно найти в книге И. Гихмана и А. Скорохода (1972).

В рассматриваемом анализе стохастических дифференциальных уравнений под $a(x(t), t)$ понимается вектор ожидаемых доходов от x, под $B(x(t), t)B'(x(t), t)$ – матрица ковариаций доходов от x. Аналогично, если I_x – диагональная матрица, i-й диагональной компонентой которой является i-я компонента вектора x, тогда $I_x^{-1}a$ есть вектор ожидаемых доходностей от x, а $I_x^{-1}BB'I_x^{-1}$ – матрица ковариации доходностей от x.

При помощи системы (3.1) определим рост начальных инвестиций, когда выход каждого процесса непрерывным образом заново инвестируется в этот же процесс, что обеспечивает полное описание доступных производственных возможностей. Данное предположение не означает, что индивидуумы или фирмы будут обязательно заново инвестировать таким же образом. Производственные процессы имеют стохастические постоянные доходы на единицу в том смысле, что распределение доходности на инвестицию в любом процессе не зависит от размера инвестиций.

Такая формулировка допускает самое общее вероятностное поведение акционерного капитала. Однако так как стохастические дифференциальные уравнения конструируются с помощью винеровских процессов, внезапные скачкообразные изменения акционерного капитала исключаются. Заметим, что приращение прибыли на инвестицию в какой-либо производственный процесс может быть отрицательным, физически отражая, таким образом, случайное обесценивание.

Предположение 3.3. Изменение k-мерного вектора переменных состояния Y описывается системой стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dY(t) = \mu(Y,\ t)dt + S(Y,\ t)dw(t), \tag{3.2}$$

где $[\mu_i(Y,\ t)]$ – k-мерный вектор, а $S(Y,\ t) = [s_{ij}(Y,\ t)]$ – матрица размерности $n \times (n + k)$.

Матрица ковариации изменения переменных состояния SS' неотрицательно определена. Предположим, что система (3.2) не обязательно линейная однородная и что Y не имеет допустимых ограничений. Процесс Y и совместный процесс $(\eta,\ Y)$ – марковские.

Наша конструкция включает как неопределенное производство, так и случайные технологические изменения. Распределение вероятностей текущей выпускаемой продукции зависит от текущего уровня переменных состояния Y, которые сами по себе также изменяются случайно во времени. Таким образом, эволюция Y определяет производственные возможности, которые будут достижимы в экономике в будущем. В общем случае эти возможности могут как улучшаться, так и ухудшаться.

Если GS' – ненулевая матрица, изменения переменных состояния своевременно согласованы с приращением доходов от производственных процессов. Действительно, когда S тождественно равно G, они полностью коррелированы, и значение Y в любой момент времени полностью определяется предыдущими доходами от производственных процессов. Следовательно, наше описание технологических изменений может легко представлять ситуации, в которых случайные возмущения любых индивидуальных производственных процессов коррелированы в течение времени. (В качестве простого примера можно взять $k = n$, $\alpha = -Y$, $\mu = -Y$ и $S = G$, где G – постоянная диагональная матрица. Тогда Y становится n-мерным авторегрессионным процессом первого порядка и (3.1) можно переписать как $d\eta(t) = I_\eta dY(t)$.)

В вектор Y могут также включаться переменные состояния, которые не воздействуют на производственные возможности, но тем не менее затрагивают интересы индивидуумов. Отложим дальнейшее обсуждение этих переменных до подходящего момента.

Предположение 3.4. Для инвесторов имеется свободный доступ к любому производственному процессу. Индивидуумы могут инвестировать в физическое производство косвенным образом, как через фирмы, так и прямо, фактически создавая собственные фирмы. Мы принимаем последнюю версию и с некоторыми замечаниями первую. Индивидуумы и фирмы конкурентоспособны и действуют так же, как на любом рынке.

Предположение 3.5. Имеется рынок для мгновенных займа и ссуды с процентной ставкой r. Рыночная процентная ставка определяется как элемент конкурентного равновесия в экономике.

Предположение 3.6. Рассматриваются рынки с множеством случайных исков (*contingent claims*) к количеству товара. Они являются ценными бумагами, которые выпускаются и покупаются индивидуумами и фирмами. В дальнейшем для простоты будем называть их *активами.* Спецификация каждого актива включает полное описание всех выплат, которые могут быть получены по этому активу. Выплаты могут зависеть от значений переменных состояния и от совокупного благосостояния. Вообще стоимость активов будет зависеть от всех переменных, необходимых для описания состояния экономики. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее изменения F^i, стоимости актива типа i, можно записать в виде

$$dF^i = (F^i\beta_i - \delta_i)dt + F^i h_i\, dw(t), \tag{3.3}$$

где h_i – $(n + k)$-мерная вектор-строка.

В уравнении (3.3) общая прибыль $\beta_i F^i$ на актив i определяется как полученные выплаты δ_i плюс среднее изменение цены $(\beta_i F^i - \delta_i)$. Дисперсия доходности актива i равна $h_i h_i'$. Формула Ито предполагает конкретное соотношение между β_i и h_i с частными производными стоимости активов и мгновенными значениями средних и ковариаций переменных, от которых она зависит, но сейчас (3.3) следует рассматривать как условную запись, описывающую некоторый экономический объект, который детально будет рассмотрен позднее. Это не означает, что изменение цены определяется экзогенно. Равновесные β_i и r являются стохастическими процессами, которые должны быть определены эндогенно.

Формула Ито может быть получена следующим образом. Пусть процесс $x(t)$ удовлетворяет уравнению $dx = a(x, t)dt + B(x, t)dw(t)$, где $a_i(x, t)$ – i-й элемент вектора a и $b_{ij}(x, t)$ – (i, j)-й элемент матрицы B. Если $f(x, t)$ является непрерывной функцией с непрерывными частными производными f_t, f_x, f_{xx} на $[t, t'] \times R^m$, тогда

$$df(x(t),t)=\left[f_t(x,t)+\sum_{i=1}^{m}f_{x_i}(x,t)a_i(x,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m}f_{x_ix_k}(x,t)\sum_{j=1}^{m}b_{kj}(x,t)b_{ij}(x,t)\right]dt+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}f_{x_j}(x,t)b_{ji}(x,t)dw_i(t).$$

Предположение 3.7. Имеется фиксированное количество индивидуумов, одинаковых по своим предпочтениям и вкладам. Все индивидуумы согласны с тем, что производственные возможности именно таковы, как они описаны. Каждый индивидуум пытается максимизировать целевую функцию в виде

$$E\int_{t}^{t'}U[C(s),Y(s),s]ds. \tag{3.4}$$

В выражении (3.4) E является оператором условного математического ожидания по текущему вкладу и состоянию экономики, $C(s)$ – поток потребления в момент s, U – функция полезности фон Неймана – Моргенштерна. Предположим, что U – возрастающая, строго вогнутая, дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$|U(C(s),Y(s),s)|\le k_1(1+C(s)+|Y(s)|)^{k_2},$$

где k_1, k_2 – некоторые положительные константы.

Здесь принята формулировка ограниченного временного горизонта для того, чтобы рассмотреть влияние продолжительности горизонта на стоимости случайных исков (активов). При необходимости можно добавить функцию, определяющую полезность финального богатства. Случай неограниченного горизонта рассматривается таким же образом с соответствующими формальными модификациями.

Предположение 3.8. Физические инвестиции и уплата по искам происходят непрерывно без регулирования и расходов на сделку. Торговля ведется только по равновесным ценам.

Начнем анализ описанной экономики с рассмотрения проблемы индивидуального распределения. Так как имеют место случайные иски, то проблема выбора индивидуального портфеля не имеет единственного решения. Следовательно, удобно выбрать базис для ряда инвестиционных возможностей, включая производственные процессы и активы (случайные иски). Базис определяется как набор производственных процессов и набор активов с вектор-строкой h_i, как в выражении (3.3), образующей матрицу H такую, что h_i может быть записан как линейная комбинация строк G и H. Теперь уравнение (3.3) будет рассматриваться относительно активов из принятого базиса. Явная структура базиса в течение времени не важна, пока размерность остается неизменной. Любое подписание нового контракта (выпуск актива) или истечение действующего, вызывающее изменение базиса, приводит к изменению возможностей хеджирования, доступных индивидууму. Для простоты предположим, что базис состоит из n производственных акций и k активов (случайных исков).

Как для индивидуального выбора, так и для равновесной стоимости достаточно определить единственное результирующее размещение ресурсов, при котором набор возможностей ограничен базисом. Любое размещение ресурсов, включающее небазисный актив, могло бы воспроизводиться управляемым портфелем базисных активов. Как только любое из этих размещений дает индивидууму одинаковое поведение портфеля во времени и одинаковый способ потребления, он будет безразличен к ним. При таком положении вещей нет причин для существования активов, но также нет причин и для того, чтобы они не существовали, поэтому можно предположить, что в общем случае будет бесчисленное множество этих активов, каждый из которых должен последовательно оцениваться при равновесии. (Это будет, например, в случае, когда рассматриваются облигации с континуумом дат погашения или опционы с континуумом цен исполнения. Тогда можно было бы описать индивидуальные холдинги в терминах меры множества ансамблей, допуская, таким образом, конечные холдинги как в точках, так и на интервалах.)

После определения набора возможностей таким способом индивидуум распределяет свое богатство среди $n + k$ базисных возможностей и $(n + k + 1)$-й безрисковой возможности, занимая или одалживая. Введем следующие обозначения: W – это текущее общее богатство индивидуума; a_iW – часть богатства, инвестированного в i-й производственный процесс; b_iW – часть богатства, вложенного в i-й актив. Индивидуум желает выбрать управления aW, bW и C, которые бы максимизировали ожидаемую им полезность при бюджетных ограничениях:

$$dW = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i W(a_i - r) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i W(\beta_i - r) + rW - C\right] dt \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i W \left(\sum_{j=1}^{n+k} g_{ij} dw_j\right) + \sum_{i=1}^{k} b_i W \left(\sum_{j=1}^{n+k} h_{ij} dw_j\right) \equiv$$

$$\equiv W\mu(W)dt + W\sum_{j=1}^{n+k} q_i dw_j .$$

Теперь сделаем предположение чисто технического характера, которое даст нам возможность применить стандартные результаты из классической теории вероятностей к этой задаче.

Предположение 3.9. В задаче максимизации выражения (3.4) индивидуум ограничивается рассмотрением класса допускающих обратную связь управлений V. Допустимое управление с обратной связью v является измеримой борелевской функцией на $[t,\ t'] \times R^{\,n+k+1}$, которая удовлетворяет условию Липшица, приведенному выше. Кроме того, допустимые неравновесные β и r ограничены и удовлетворяют условию Липшица.

Измеримость подразумевает естественное ограничение: управление в любое время должно зависеть только от информации, доступной к этому времени.

Определим

$$K(v(t),\, W(t),\, Y(t),\, t) = E\left\{\int_t^{t'} U(v\ (s),\, Y(s),\, s)\, ds \,\middle|\, W,\, Y,\, t\right\},$$

где $v(t)$ – допустимое управление обратной связью, и пусть $L^v(t)K$ будет дифференциальным оператором, действующим на K, связанным с этим управлением:

$$L^v(t)K = \mu(W)WK_W + \sum_{i=1}^{k} \mu_i K_{Y_i} + \frac{1}{2} W^2 K_{WW} \sum_{i=1}^{k+n} q_i^{\,2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} WK_{WY_i} \sum_{j=1}^{n+k} q_i s_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} K_{Y_i Y_j} \sum_{m=1}^{n+k} s_{im} s_{jm}. \tag{3.5}$$

Теперь сформулируем следующие основные условия оптимальности для задачи индивидуального управления.

Лемма 3.1. Пусть $J(W, Y, t)$ является решением уравнения Беллмана:

$$\max_{v \in V} \left[L^{v}(t)J + U(v, Y, t) \right] + J_t = 0 \tag{3.6}$$

для $(t, W, Y) \in D \equiv [t, t') \times (0, \infty) \times R^k$ с граничными условиями

$$J(0, Y, t) = E\left\{ \int_t^{t'} U(0, Y(s), s)ds \middle| Y, t \right\} \text{ и } J(W, Y, t') = 0$$

такими, что J вместе с первыми частными производными по t, Y, W и вторыми производными по W, Y непрерывна на D; J непрерывна на замыкании $\overline{D}$, и для некоторых констант k_1 и k_2 выполняется неравенство $\left| J(W, Y, t) \right| \le k_1 \left| W, Y \right|^{k_2}$. Тогда: 1) $J(W, Y, t) \ge K(v, W, Y, t)$ для любого допустимого управления с обратной связью v и начального состояния W, Y; 2) если $\hat{v}$ – допустимое управление с обратной связью такое, что

$$L^{\hat{v}}(t)J + U(\hat{v}, Y, t) = \max_{v \in V} [L^{v}(t)J + U(v, Y, t)] \tag{3.7}$$

выполняется для любых $(t, W, Y) \in D$, то $J(W, Y, t) = K(\hat{v}, W, Y, t)$ для любых $(t, W, Y) \in D$, и $\hat{v}$ – оптимально.

Доказательство (см. Fleming, Rishel, 1975).

Можно также показать, что в контексте наших рассуждений любая достаточно гладкая косвенная функция полезности должна удовлетворять уравнению Беллмана (3.6).

Для нас представляет интерес характеризация равновесия, поэтому во избежание дальнейших технических деталей сделаем следующее предположение.

Предположение 3.10. Существует единственная функция J и управление $\hat{v}$, удовлетворяющие уравнению Беллмана и установленным условиям регулярности.

Следующая лемма подтверждает, что J, косвенная функция полезности, наследует некоторые из качественных свойств функции полезности U.

Лемма 3.2. Функция J есть возрастающая, строго вогнутая функция W.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим, что текущее богатство инвестора $W_2 > W_1$. Поскольку допустимое множество V выпуклое, инвестор может выбрать

$$\hat{C}(W_1) + \hat{C}(W_2 - W_1),$$
$$\hat{a}(W_1)W_1 + \hat{a}(W_2 - W_1)(W_2 - W_1),$$
$$\hat{b}(W_1)W_1 + \hat{b}(W_2 - W_1)(W_2 - W_1).$$

Следовательно,

$$J(W_2) \geq K(\hat{v}(W_1) + \hat{v}(W_2 - W_1), W_2) > K(\hat{v}(W_1), W_1) = J(W_1),$$

откуда J – возрастающая функция W. Теперь предположим, что текущее богатство индивидуума равно $\lambda W_1 + (1 - \lambda)W_2$. Поскольку он всегда может выбрать управление

$$\begin{gathered} \lambda\hat{C}(W_1) + (1 - \lambda)\hat{C}(W_2), \\ \lambda\hat{a}(W_1)W_1 + (1 - \lambda)\hat{a}(W_2)W_2, \\ \lambda\hat{b}(W_1)W_1 + (1 - \lambda)\hat{b}(W_2)W_2, \end{gathered} \tag{3.8}$$

то

$$J(\lambda W_1 + (1 - \lambda)W_2) \geq K(\lambda\hat{v}(W_1)W_1 + (1 - \lambda)\hat{v}(W_2), \lambda W_1 + (1 - \lambda)W_2) >$$
$$> \lambda K(\hat{v}(W_1)W_1) + (1 - \lambda)K(\hat{v}(W_2)W_2) = \lambda J(W_1) + (1 - \lambda)J(W_2).$$

Таким образом, J – строго вогнутая функция переменной W.

Пропорции портфеля a_i представляют инвестиции в физические производственные процессы, поэтому они должны быть неотрицательными. Проще говоря, отрицательное потребление не имеет смысла. Наряду с этими утверждениями необходимыми и достаточными условиями для максимизации функции $\varphi \equiv L^v J + U$ как функции C, a, b будут

$$\psi_C = U_C - J_C \leq 0, \tag{3.9}$$
$$C\psi_C = 0,$$
$$\psi_A = [\alpha - r]WJ_W + [GG'a + GH'b]W^2 J_{WW} + GS'WJ_{WY} \leq 0, \tag{3.10}$$
$$a'\psi_a = 0, \tag{3.11}$$
$$\psi_b = [\beta - r\mathbf{1}]WJ_W + [HG'a + HH'b]W^2 J_{WW} + HS'WJ_{WY} = 0, \tag{3.12}$$

где β – вектор-столбец размерности k, чей i-й элемент равен β_I; J_{WY} – вектор-столбец размерности k, чей i-й элемент равен J_{WY_i}; $\mathbf{1}$ – вектор-столбец размерности k, составленный из единиц.

Разрешив систему (3.8) относительно $\hat{C}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$ в терминах W, Y, t и частных производных J и подставив полученные решения обратно в уравнение (3.6), получим дифференциальное уравнение в частных производных для J. Подставив решение для J из этого уравнения обратно в $\hat{C}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$, получим их как функции только W, Y и t; W и J будут соответственно текущим благосостоянием и косвенной функцией полезности репрезентативного индивидуума.

Инвестор определяет $\hat{C}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$, выбирая значения r, a, b такими, которые принимались выше. Равновесие в экономике определяет чистую рыночную процентную ставку, равновесную ожидаемую доходность по случайным искам, общий производственный план и общий потребительский план. В целом чистое предложение случайных исков и безрисковых займов должно быть равным 0. Формально мы имем следующее определение.

Определение 3.1. Равновесие определяется как множество стохастических процессов (r, β, a, C), удовлетворяющих системе (3.8) и чистым рыночным условиям $\Sigma a_i = 1$, $b_i = 0$ для всех i.

Как скоро станет очевидным, это определение эквивалентно определению равновесия в терминах множества стохастических процессов r, F; a, C. Существование и единственность равновесия и его характеризация посредством основного уравнения динамического программирования фактически допускается в предположении 3.10. В этом однородном обществе равновесие является чисто оптимальным по Парето, поскольку для любых r, β все индивидуумы имеют возможность достигнуть наиболее благоприятных условий соответствия задачи планирования без ссуд, займов и случайных исков.

Теперь предположим, что инвестиции делаются через конкурентоспособные, максимизирующие прибыль фирмы. Для простоты будем считать, что каждая фирма инвестирует только в один процесс и пусть промышленность состоит из всех фирм, участвующих в производственном процессе. Со свободным доступом и стохастическими постоянными доходностями для фирм не будет стимула вступать или покидать промышленность, если и только если прибыль на акции каждой фирмы (в сроки, в течение которых по ним получается капитал) технологически идентична определенным физическим прибылям на этот процесс. Тогда шкала равновесия в каждой промышленности определялась бы предложением инвестирования, которое было бы таким же, как при равновесии с прямым инвестированием индивидуумами. Другими словами, в такой простой экономике решение задачи планирования будет эквивалентно конкурентному равновесию.

Вернемся к определению равновесных значений a, r и β. Очевидно, что равновесное решение для них в терминах J частично разделимо. При $b = 0$ уравнения (3.10), (3.11) определяют a, r. Когда r и a известны, уравнение (3.12) является линейной системой относительно β. Однако это не означает, что решения потребления и инвестирования раздельные, так как J должно быть определено совместно. На основании свойств сепарабельности можно понять равновесие лучше, рассматривая две связанные задачи: 1) задачу планирования с такими же физическими производственными возможностями, но без займов, ссуд и случайных исков и 2) аналогичную задачу с займами и ссудами, но без случайных исков.

Рассмотрим оптимальную стратегию физического инвестирования a^*, оптимальную стратегию потребления C^* и соответствующую косвенную функцию полезности J^*, выражающую индивидуальное решение задачи планирования 1. Распределение составляющих портфеля может быть записано как задача квадратичного программирования:

$$\max_{a} a'\gamma + a'Da$$

при ограничениях: $a'\mathbf{1} = 1$, $a \geq 0$, где γ равно $aWJ^*_W + GS'WJ^*_{WY}$, D равно $GG'W^2J^*_{WW}/2$, $\mathbf{1}$ – единичный вектор. Так как a^* оптимально, то по теореме Куна – Такера существует λ^* такое, что

$$\gamma - \lambda^*\mathbf{1} + 2D\,a^* \leq 0,\ \ a^{*\prime}\gamma - \lambda^* a^{*\prime}\mathbf{1} + 2\,a^{*\prime}D\,a^* = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу 2 со ставкой займа и ссуды r^* и с косвенной функцией полезности J^{**}. Исследование показывает, что если $J^{**} = J^*$ и $r^* = \lambda^*/WJ_W^*$, тогда (r^*, a^*, C^*) является равновесием для задачи 2. Равновесная ставка процента r^* пропорциональна множителю Лагранжа, связанному с ограничением $a'\mathbf{1} = 1$. Таким образом, равновесие в нашей экономике выражается следующими равенствами: $J = J^* = J^{**}$, $\hat{a} = a^*$, $\hat{C} = C^*$ и $r = r^*$.

Обсудим сначала некоторые свойства равновесной процентной ставки и затем вернемся к равновесной доходности на случайные иски. Равновесная процентная ставка может быть явно выражена в следующем виде:

$$r(W,Y,t)=\frac{\lambda^*}{WJ_W}=a^{*\prime}\alpha+a^{*\prime}GG'a^*W\left(\frac{J_{WW}}{J_W}\right)+a^{*\prime}GS'\left(\frac{J_{WY}}{J_W}\right)=$$

$$=a^{*\prime}\alpha-\left(\frac{J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{var}W}{W}\right)-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{cov}W,Y_i}{W}\right), \qquad (3.13)$$

где $(\operatorname{cov}W,\ Y_i)$ означает ковариацию изменения оптимально инвестированного богатства с изменением переменной состояния Y_i и то же для $(\operatorname{var}W)$ и $(Y_i,\ Y_j)$. Если существует локально безрисковый производственный процесс, то его доходность ниже границы для процентной ставки. Процентная ставка окажется на этой нижней границе, как только в равновесии будет использоваться локально безрисковый процесс. Можно проверить, что равенство (3.13) при этом выполняется.

Выражение $a^{*\prime}\alpha$ является ожидаемой доходностью на оптимально инвестированное богатство. Равновесная процентная ставка r может быть как меньше, так и больше $a^{*\prime}\alpha$, если даже все индивидуумы не расположены к риску при потребительской линии поведения. Хотя инвестиции в производственные процессы приводят к неуверенности индивидуума в получаемом выходе, ему разрешается хеджировать риск неблагоприятного изменения технологии. Индивидуум, инвестирующий только в локально безрисковые займы, был бы не защищен от этого последнего риска. В общем случае может преобладать тот или иной эффект. Наличие нерасположенности к риску предполагает, что определенная эквивалентная доходность физической инвестиции $\bar{r}$ превышала бы процентную ставку. Рассмотрим единственный локально безрисковый процесс производства, полезность дохода от которого равна полезности оптимального инвестирования в первоначальные n процессов. Доходность этого процесса по определению равна $\bar{r}$. Проверка с помощью (3.7) показывает, что

$$\bar{r}(W,\ Y,\ t)=r(W,\ Y,\ t)+\frac{1}{2}\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{var}W}{W}\right).$$

Следующая теорема дает интуитивную интерпретацию равновесной процентной ставки. Сначала сделаем одно аналитическое предположение, которое будет нужно лишь при доказательстве теоремы 3.1.

Предположение 3.11. J_{WW}, J_{WY}, J_{YiYj}, J_t, a_i^* и C^* имеют одну непрерывную производную по W на $\boldsymbol{D}$.

Теорема 3.1. При равновесии имеем:

r = – (*ожидаемый темп изменения роста предельной полезности богатства*) = (*ожидаемая доходность богатства*) +
+ (*ковариация между доходностью богатства и темпом изменения роста предельной полезности богатства*). (3.14)

Доказательство. По формуле Ито J_W будет удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$dJ_W = (J_{Wt} + LJ_W)dt + [J_{WW}\, a^{*\prime} GW + J'_{WY}\, S]dw(t),$$

где L – это оператор дифференцирования, определенный соотношением (3.5). Следовательно, ожидаемая норма изменения полезности определяется как $(J_{Wt} + LJ_W)/J_W$. Дифференцируя уравнение (3.6) по W, используя систему (3.8) и делая перестановку слагаемых в полученном выражении, находим

$$r = \left[a^{*\prime}\alpha - \left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{var} W}{W}\right) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{cov} W,\, Y_i}{W}\right)\right] =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(\operatorname{var} W)J_{WWW} + \sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov} W,\, Y_i)J_{WWY_i} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\operatorname{cov} Y_i,\, Y_j)J_{WY_iY_j} + [a^{*\prime}\alpha W - C^*(W, Y, t)]J_{WW} +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k}\mu_i(Y)J_{WY_i} + J_{W_t}\right] \Big/ J_W = -\left(J_{W_t} + LJ_W\right)\big/ J_W\,,$$

что доказывает первую часть. Поскольку процессы W и Y определяются уравнениями

$$dW = (a^{*\prime}\alpha W - C^*)dt + a^{*\prime} GWdw(t) \text{ и } dY = \mu dt + Sdw(t),$$

находим ковариацию доходности богатства с темпом изменения роста предельной полезности богатства:

$$\left(\frac{\operatorname{cov} W, J_W}{WJ_W}\right) = \left(\frac{1}{J_W}\right)\left(J_{WW}a^{*\prime}GW + J'_{WY}S\right)(a^{*\prime}G)' =$$

$$= -\left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{var} W}{W}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{cov} W, Y_i}{W}\right)\right].$$

Средняя доходность богатства равна $a^{*\prime}\alpha$. Объединяя их и сравнивая с выражением (3.13), доказываем справедливость второй части.

Если $U[C(s), Y(s), s] = e^{-\rho s}U[C(s), Y(s)]$, то первое выражение правой части формулы (3.14) может быть переписано как ρ минус ожидаемый темп изменения роста недисконтированной предельной полезности богатства.

Эта интерпретация приводит, конечно, к стандартным результатам, когда неопределенность отсутствует.

Теперь обратимся к равновесной ожидаемой прибыли на случайные иски. Вторая теорема дает ее в терминах основных переменных.

Теорема 3.2. Равновесная ожидаемая прибыль на любой случайный иск (например, i-й) определяется формулой

$$(\beta_i - r)F^i = [\varphi_W \varphi_{Y_1} \ldots \quad \varphi_{Y_k}][F_W^i F_{Y_1}^i \ldots \quad F_{Y_k}^i]', \tag{3.15}$$

где

$$\varphi_W = \left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{var} W) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ Y_i)\right],$$

$$\varphi_{Y_i} = \left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ \ Y_i) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ Y_i)\right].$$

Доказательство. Подставляя a^* и r в (3.12), получаем

$$\beta(W, Y, t) = (a^{*\prime}\alpha)\mathbf{1} + \left(\frac{1}{J_W}\right)[(a^{*\prime}GS'J_{WY})\mathbf{1} - HS'J_{WY}] +$$

$$+\left(\frac{WJ_{WW}}{J_W}\right)[(a^{*\prime}GG'a^*)\mathbf{1} - HG'a^*].$$

Использовав формулу Ито, чтобы получить H в явном виде, и затем, перегруппировав слагаемые, получим, что ожидаемый доход на любой случайный иск (например, i-й) может быть записан в следующем виде:

$$\beta_i F^i = rF^i + F_W^i\left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{var} W) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ Y_i)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} F_W^i\left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ Y_i) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ Y_i)\right],$$

что можно записать в компактной форме:

$$(\beta_i - r)F^i = [\phi_W \phi_{Y_1} \ldots \phi_{Y_k}][F_W^i\ F_{Y_1}^i \ldots F_{Y_k}^i]'. \qquad (3.16)$$

Равновесная ожидаемая прибыль на случайные иски не из базиса определяется единственным образом через равновесные ожидаемые доходности в базисе. Вспомним, что можно создать управляемый портфель из базисных активов, который точно воспроизводил бы порядок выплат по любому небазисному непрерывному иску $\overline{F}$. При равновесии начальное значение и ожидаемая доходность на $\overline{F}$ должны быть равны таким же в управляемом портфеле. Пусть θ_i – число стоимостей F^i, содержащихся в управляемом портфеле. Пусть F^1 будет оптимально инвестированным богатством и пусть F^{k+2} будет единицей инвестиции в локально нерисковые займы, поэтому $F^{k+2} \equiv 1$. Таким образом, имеем $F = \sum_{i=1}^{k+2}\theta_i F^i$, $\overline{\beta}\overline{F} = \sum_{i=1}^{k+2}\theta_i\beta_i F^i$. Комбинируя эти выражения и используя равенство $\beta_{k+2} = r$, получаем

$$(\overline{\beta} - r)\overline{F} = [(\overline{\beta}_1 - r)F^1(\overline{\beta}_2 - r)F^2 \ldots (\overline{\beta}_{k+1} - r)F^{k+1}][\theta_1\theta_2\ldots\theta_{k+1}]' =$$

$$= [\phi_W \phi_{Y_1} \ldots \phi_{Y_k}]\begin{bmatrix} F_W^1 & \ldots & F_W^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{Y_k}^1 & \ldots & F_{Y_k}^{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \ldots \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix}. \qquad (3.17)$$

Равенство (3.17) следует из (3.16). Снова используя формулу Ито, мы можем записать θ в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_W^1 & \dots & F_W^{k+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F_{Y_k}^1 & \dots & F_{Y_k}^{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{F}_W \\ \vdots \\ \overline{F}_{Y_k} \end{bmatrix}. \qquad (3.18)$$

Комбинируя равенства (3.17) и (3.18), получаем

$$(\overline{\beta} - r)\overline{F} = [\phi_W \phi_{Y_1} \dots \phi_{Y_k}][\overline{F}_W \overline{F}_{Y_1} \dots \overline{F}_{Y_k}]'.$$

Это показывает, что формула (3.15) содержит все случайные иски.

Равновесная ожидаемая прибыль на любой случайный иск может быть записана как безрисковая прибыль плюс линейная комбинация первых частных производных стоимостей активов по W и Y. Пока эти производные зависят от обеспечения активов по контракту, коэффициенты в линейной комбинации неизвестны так же, как и для всех случайных исков.

Коэффициенты линейной комбинации в формуле (3.15) могут быть даны в терминах равновесных ожидаемых доходностей на отдельные ценные бумаги или их портфель. Из соотношения (3.13) имеем, что $\phi_W = (a^{*\prime}\alpha - r)W$ есть ожидаемое увеличение прибыли (по безрисковой ставке) на инвестированное богатство. Коэффициент ϕ_{Y_i} – ожидаемая избыточная отдача на ценные бумаги такая, что его значение всегда равно Y_i. Чтобы получить условия контракта, требуемые в этой конструкции, можно использовать уравнение (3.20) (см. ниже). Коэффициент ϕ_{Y_i} также выражается как функция от ожидаемой доходности на любые другие ценные бумаги или портфель, чьи значения зависят только от Y_i.

С. Росс (Ross, 1976) показал, что если прибыль на ценную бумагу порождается линейной факторной моделью при совершенно общих условиях, то равновесная ожидаемая избыточная доходность на любую ценную бумагу может быть записана в виде линейной комбинации премий за фактор риска. Рисковая премия j-го фактора определяется как ожидаемая избыточная доходность на ценную бумагу или портфель, которые имеют только риск j-го фактора. Хотя рассматриваемая основная модель разработана полнее, коэффициенты ϕ_{Y_i} и ϕ_W являются факторными рисковыми премиями Росса и могут быть интерпретированы таким же образом.

Из доказательства второй части теоремы 3.1 видно, что ϕ_W – это ковариация между изменением богатства и нормой изменения предельной полезности богатства, взятая с противоположным знаком. Очевидным образом доказывается, что ϕ_{Y_i} есть ковариация изменения i-й переменной состояния и нормы изменения предельной полезности богатства, взятая с противоположным знаком. Используя формулу Ито, чтобы выразить уравнение (3.2) в явной форме, как в доказательстве теоремы 3.2, имеем $\beta_i - r = -(\operatorname{cov} F^i, J_W)/F^i J_W$.

Таким образом, избыточная ожидаемая доходность на i-й актив равна ковариации его доходности и нормы изменения предельной полезности богатства, взятой с противоположным знаком. Как мы и ожидали, индивидуумы желают принимать более низкую среднюю доходность на ценные бумаги, по которым выплаты более высокие, когда предельная полезность выше. Следовательно, при равновесии такие ценные бумаги будут иметь более низкую общую премию за риск.

Если предельная полезность U не зависит от переменных состояния Y и если и U, и функция оптимального потребления C^* имеют требуемые производные, то применение формулы Ито к предельной полезности потребления $U_C(C^*)$ дает, что

$$dU_C = [LU_C + U_C]dt + U_{CC}[C_W^* a^{*\prime} GW + C_Y^* S]dw(t), \quad (3.19)$$

где C_W^* – частная производная C^* по W; C_Y^* – $(1\times k)$-вектор, чей i-й элемент – это $C_{Y_i}^*$, частная производная C^* по Y_i.

Если к тому же оптимальное потребление всегда положительно, то $U_C\,(C^*)$ всегда равно J_W. Путем дифференцирования условия (3.9) получаем $J_{WW} = U_{CC} C_W^*$ и $J_{WY_i} = U_{CC} C_{Y_i}^*$, и, используя (3.19), можем переписать премию за фактор риска в виде

$$\phi_Y = \left(\frac{-U_{CC}(C^*)}{U_C(C^*)}\right)(\operatorname{cov} C^*, Y),$$

$$\phi_W = \left(\frac{-U_{CC}(C^*)}{U_C(C^*)}\right)(\operatorname{cov} C^*, W),$$

где $\operatorname{cov}(C^*, W)$ обозначает ковариацию между изменением потребления и изменением богатства и $\operatorname{cov}(C^*, Y)$ определена таким же образом. Далее следует, что

$$(\beta_i - r)F^i = \left(\frac{-U_{CC}(C^*)}{U_C(C^*)}\right)(\operatorname{cov} C^*,\, F^i),$$

так что ожидаемая избыточная прибыль на любую ценную бумагу пропорциональна ее ковариации с оптимальным потреблением.

Два следующих замечания по теореме 3.2 заслуживают внимания. Заметим, во-первых, что так как предпочтения ведут к нейтральности к риску в потребительском отношении, никакие факторные рисковые премии не исчезают. Индивидуумы, которые нейтральны к риску в потребительском отношении, не были бы нейтральны к неопределенности в изменении технологии, и факторные рисковые премии отражали бы их желание хеджировать эту неопределенность. Во-вторых, мы могли бы переписать формулу (3.15) таким образом, чтобы равновесная ожидаемая доходность на любой актив или любой активный производственный процесс выражалась в терминах равновесной ожидаемой доходности на другие активы или портфель. Следовательно, можно записать выражение для соответствующих доходностей, которые неявно включают предпочтения.

§ 2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ И ЕГО ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Теперь можно использовать полученные результаты, чтобы получить один из основных результатов главы. Это основное уравнение определения стоимости активов, основанное на следующей теореме.

Теорема 3.3. Стоимость любого случайного иска удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{var} W)F_{WW} + \sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov} W,\, Y_i)F_{WY_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\operatorname{cov} Y_i,\, Y_j)F_{Y_iY_j} +$$

$$+\ [r(W, Y, t)W - C^*(W, Y, t)]F_W +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}F_{Y_i}\left[\mu_i - \left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\, Y_i) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} Y_i,\, Y_j)\right] +$$

$$+ F_t - r(W, Y, t)F + \delta(W, Y, t) = 0, \qquad (3.20)$$

где $r\,(W, Y, t)$ получаем из уравнения (3.13) в виде

$$r(W,\ \ Y,\ \ t)=a^{*\prime}\alpha-\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{var}W}{W}\right)-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{\operatorname{cov}W,\ \ Y_i}{W}\right).$$

Доказательство. Используя формулу Ито, получаем

$$\beta F-\delta=\frac{1}{2}(\operatorname{var}W)F_{WW}+\sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov}W,\,Y_i)F_{WW}+\sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov}W,\,Y_i)F_{WY_i}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\operatorname{cov}Y_i,\,Y_j)F_{Y_iY_j}+(a^{*\prime}\alpha W-C^{*}W,\,Y,\,t))F_W+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\mu_i F_{Y_i}+F_{t'}. \tag{3.21}$$

С другой стороны, в теореме 3.2 говорится, что при равновесии ожидаемая прибыль на F должна быть такой:

$$\beta F=rF+F_W\left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{var}W)+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov}W,\,Y_i)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}F_{Y_i}\left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{cov}W,\,Y_i)+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{J_{WY_j}}{J_W}\right)(\operatorname{cov}Y_i,\,Y_j)\right]. \tag{3.22}$$

Объединяя равенства (3.21) и (3.22), получаем требуемое уравнение (3.20).

Уравнение определения стоимости справедливо для любого актива. Вид полученных платежей δ и соответствующие граничные и конечные условия отличаются для каждого актива и определяются условиями контракта. В общем случае F определено на $[t, T) \times Z$, где Z – открытое множество с границей ∂Z. Пусть $\hat{\partial} Z$ – замкнутое множество, такое, что $(W(\tau), Y(\tau)) \in \hat{\partial} Z$ для всех $(W(t), Y(t))$, где τ – время первого выхода из Z. Таким образом, уравнение (3.20) будет справедливым для всех $(s, W(s), Y(s)) \in [t, T) \times Z$ с контрактными условиями, определяющими граничную информацию:

$$F(W(T),\,Y(T),\,T)=\theta(W(T),\,Y(T)),\qquad W(T),\,Y(T)\in Z;$$

$$F(W(\tau), Y(\tau), \tau) = \Psi(W(\tau), Y(\tau), \tau), \quad W(\tau), Y(\tau) \in \hat{\partial} Z. \qquad (3.23)$$

Другими словами, актив F дает его владельцу право получать три типа платежа:

1) если лежащие в основе переменные не покидают определенную область до наступления даты погашения T, в дату погашения осуществляется платеж θ;

2) если лежащие в основе переменные все же покинут определенную область в момент τ до наступления даты погашения T, в дату T осуществляется платеж Ψ;

3) поток платежей δ осуществляется до времени T или до времени τ в зависимости от того, какой момент наступит раньше.

Границы области могут быть определены в контракте или выбраны владельцем актива, чтобы максимизировать стоимость актива. Все полученные результаты применимы в любом из этих случаев. Таким образом, эта постановка подходит для большинства ценных бумаг, которые имеют практическую пользу.

Важно делать различие между граничными условиями для актива F и граничными условиями для косвенной функции полезности J. На результаты предыдущего параграфа не влияют граничные условия, которые налагаются на какие-либо конкретные активы. Однако если Y имеет достижимые границы, тогда условия должны будут налагаться на J на этих границах. Также если эти границы содержатся в Z, тогда значения F не обязательно будут даваться в терминах контракта, и дополнительные условия на F на этих границах нужно определять из экономического анализа будущего. Например, если Y_i может сразу достигать отражающего барьера d, тогда отсутствие арбитражных возможностей обычно будет требовать выполнения следующего равенства: $F_{Y_i}(W, ..., Y_{i-1}, d, Y_{i+1}, ..., t) = 0.$

Существование и единственность решения основного уравнения определения стоимости (3.20) могут быть установлены при помощи дополнительных условий регулярности. Чтобы интерпретировать решение, рассмотрим две системы стохастических дифференциальных уравнений:

система I: $$dW(t) = [a^{*\prime}\alpha W - C^*]dt + a^{*\prime} G W dw(t),$$

$$dY(t) = \mu(Y, t)dt + S(Y, t)dw(t);$$

система II: $\quad dW(t) = [a^{*\prime}\alpha W - \phi_W - C^*]dt + a^{*\prime} GWdw(t),$

$$dY(t) = [\mu(Y, t) - [\phi_{Y_1}\phi_{Y_2} \ldots \phi_{Y_k}]dt + S(Y, t)dw(t),$$

где процессы, являющиеся решениями систем I и II, определены на одном и том же вероятностном пространстве и имеют одни и те же начальные условия. Система I описывает фактическое изменение W и Y до момента, когда впервые $W = 0$, в то время как система II описывает изменение аналогичного процесса, дрейф которого видоизменяется факторной рисковой премией. Предположим, что область задания коэффициентов расширена от $(0, \infty) \times \mathbf{R}^k$ до $\mathbf{R}^{k+1}$ произвольным образом так, чтобы условия регулярности в предположении 3.2 удовлетворялись и положительные значения W были недостижимы при неположительных начальных условиях. Сфера наших интересов будет ограничена поведением решений систем I и II по Z. Каждый из процессов j, $j = 1, 2$, порождает вероятноять Π_j на (C_T^{k+1}, Q_T), где C_T^{k+1} – пространство непрерывных функций $f(s)$, отображающих $[t, T]$ на $\mathbf{R}^{k+1}$, и Q_T есть σ-алгебра, порожденная множествами $(f(s) \in B)$, где B – любое борелевское множество в $\mathbf{R}^{k+1}$ и $s \in [t, T]$.

Для того чтобы установить существование и единственность решения уравнения (3.20), сделаем несколько дополнительных технических предположений и будем считать, что они выполняются всюду позже. Пусть множество Z будет ограниченным и $(0, Y) \notin \bar{Z}$, замыканию множества Z. Пусть каждая точка $\hat{\partial} Z$ имеет барьер, и барьер $f_v(x)$ в точке $y \in \partial Z$ является непрерывной неотрицательной функцией на $\bar{Z}$, которая уменьшается до нуля только в точках y и для которой $Lf_v(x) \leq -1$. Предположим также, что: 1) функция платежей δ равномерно непрерывна по Гёльдеру на $(W, Y, s) \in \bar{Z} \times [t, T]$; 2) функция θ непрерывна на множестве $\bar{Z}$; 3) функция Ψ непрерывна на $\hat{\partial} Z \times [t, T]$ и 4) $\Psi(W(T), Y(T), T) = \theta(W(T), Y(T), T)$, если $(W(T), Y(T)) \in \hat{\partial} Z$. Предыдущие предположения подразумевают, что коэффициенты F и LF равномерно непрерывны по Липшицу для всех $(W, Y, s) \in \bar{Z}$. Тогда (см. Гихман и Скороход, 1972) существует единственное решение (3.20) с граничными условиями (3.23).

Системы I и II могут быть использованы для интерпретации решения уравнения определения стоимости (3.20). Эта интерпретация содержится в следующих двух леммах.

Лемма 3.3. Единственное решение уравнения (3.20) с граничными условиями (3.23) имеет следующий вид:

$$F(W, Y, t, T) = E\{\theta(W(T), Y(T))\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\int_t^T \beta(W(u), Y(u), u)du\right)\right] I(\tau \geq T) + \Psi(W(\tau), Y(\tau), \tau)\times$$

$$\times\left[\exp\left(\int_t^\tau \beta(W(u), Y(u), u)du\right)\right] I(\tau < T) + \int_t^{\tau\wedge T} \delta(W(s), Y(s), s)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\int_t^s \beta(W(u), Y(u), u)du\right)\right] ds \Big| W, Y, t\Big\}, \qquad (3.24)$$

где E означает математическое ожидание по отношению к системе I; $I(.)$ – индикаторная функция; τ – время первого касания $\hat{\partial} Z$.

Доказательство. Для доказательства необходимо вспомнить определение β и тот факт, что согласно формуле Ито имеет место выражение $LF + Ft + \delta = F$. Тогда получим требуемый результат (см. Гихман и Скороход, 1972).

Выражение в (3.24) проясняет интуитивную идею дисконтирования по меняющейся случайным образом доходности. Однако это не обеспечивает конструктивного пути поиска F, если равновесная ожидаемая доходность β заранее точно неизвестна. Напротив, следующая лемма для получения конструктивного решения требует только процентную ставку и факторные рисковые премии, и они являются общими для всех ценных бумаг.

Лемма 3.4. Единственное решение уравнения (3.20) с граничными условиями (3.23) также имеет вид

$$F(W, Y, t, T) = \hat{E}\left\{\theta(W(T), Y(T))\left[\exp\left(-\int_t^T r(W(u), Y(u), u)du\right)\right]\times\right.$$

$$\times I(\tau \geq T) + \Psi(W(\tau), Y(\tau), \tau)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(W(u), Y(u), u)du\right)\right] I(\tau < T) + \int_t^{\tau\wedge T} \delta(W(s), Y(s), s)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\int_t^s r(W(u), Y(u), u)du\right)\right]ds\Bigg|W,\ Y,\ t\Bigg\}, \qquad (3.25)$$

где $\widehat{E}$ означает математическое ожидание по решению системы II; $I(.)$ и τ определены в выражении (3.24).

Доказательство. Для доказательства необходимо применить к уравнению (3.20) результаты теории стохастических дифференциальных уравнений (см. Гихман и Скороход, 1972).

Из уравнения (3.25) видно, что равновесная цена актива дается его ожидаемым дисконтированным значением при безрисковой ставке, когда математическое ожидание берется по отрегулированному риском процессу для богатства и переменных состояния. Регулирование риском достигается уменьшением изменения каждой определенной переменной с помощью соответствующей факторной рисковой премии.

§ 3. СВЯЗЬ С МОДЕЛЬЮ ЭРРОУ – ДЕБРЮ И РОЛЬ ФИРМ

Представленная здесь модель согласуется с теорией К. Эрроу (Arrow, 1964) и Г. Дебрю (Debrue, 1959), и следующая теорема подтверждает, что решение (3.20) может быть интерпретировано в терминах взвешенной предельной полезности ожидаемых стоимостей. В ходе ее доказательства вспомним определение L из представления (3.5) и введем χ как вектор размерности $(k + 1) \times 1$

$$\chi' = \left[\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{-J_{WY_1}}{J_W}\right)\cdots\left(\frac{-J_{WY_k}}{J_W}\right)\right]$$

и Σ как матрицу размерности $(k + 1) \times (n + k)$: $\Sigma = \begin{bmatrix} a^{*\prime}GW \\ \cdots \\ S \end{bmatrix}$.

Предположим, что $E\{\exp(\lambda|\chi'(s)\Sigma(s)|^2)|W, Y, t\} \le d$ для некоторых $\lambda > 0$, $d > 0$ и всех s таких, что $t \le s \le T$.

Теорема 3.4. Цена любого случайного иска дается выражением

$$F(W, Y, t, T) =$$

$$= E\left\{\theta(W(T),\quad Y(T))\left(\frac{J_W(W(T),\quad Y(T),\quad T)}{J_W(W(t),\quad Y(t),\quad t)}\right)I(\tau \geq T) + \right.$$

$$+\ \Psi(W(\tau),\, Y(\tau),\, \tau)\times\left(\frac{J_W(W(T),\, Y(T),\, T)}{J_W(W(t),\, Y(t),\, t)}\right)I(\tau < T) +$$

$$\left. + \int_t^{\tau\wedge T} \delta(W(s),\, Y(s),\, s)\left(\frac{J_W(W(s),\, Y(s),\, s)}{J_W(W(t),\, Y(t),\, t)}\right)ds \,\middle|\, W,\ Y,\ t\right\}, \qquad (3.26)$$

где, как и ранее, E – математическое ожидание по решению системы I; $I(.)$ и τ определены в выражении (3.24).

Доказательство. Согласно формуле Ито, имеем

$$\left(\frac{J_W(W(s),\, Y(s),\, s)}{J_W(W(t),\, Y(t),\, t)}\right) =$$

$$= \exp\bigl(\log J_W(W(s),\, Y(s),\, s) - \log J_W(W(t),\, Y(t),\, t)\bigr) =$$

$$= \exp\left[\int_t^s\left(L(\log J_W(u)) + \frac{\partial(\log J_W(u))}{\partial t}\right)du + \int_t^S(-\chi'\Sigma)dw(u)\right].$$

Теперь

$$L\log J_W = \left(\frac{1}{J_W}\right)LJ_W - \frac{1}{2}(\operatorname{var}W)\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov}W,\, Y_i)\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\operatorname{cov}Y_j,\, Y_i)\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{-J_{WY_j}}{J_W}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{J_W}\right)LJ_W - \frac{1}{2}\chi'\Sigma\Sigma'\chi = \left(\frac{1}{J_W}\right)LJ_W - \frac{1}{2}|\chi'\Sigma|^2.$$

Далее из теоремы 3.1

$$\left(\frac{1}{J_W}\right)(LJ_W + J_{W_t}) = -r(W,\, Y,\, t).$$

Таким образом, выражение $\left(\dfrac{J_W(W(s),\, Y(s),\, s)}{J_W(W(t),\, Y(t),\, t)}\right)$ может быть записано в виде

$$\left(\frac{J_W(W(s),\, Y(s),\, s)}{J_W(W(t),\, Y(t),\, t)}\right) = \left[\exp\left(-\int_t^{\tau} r(W(u),\, Y(u),\, u)\,du\right)\right]\times$$

$$\times\left[\exp\left(\int_t^{s}(-\chi'\Sigma)dw(u) - \frac{1}{2}\int_t^{s}|\chi'\Sigma|^2 du\right)\right]. \qquad (3.27)$$

Далее непосредственно из теоремы Гирсанова (1960) выражение (3.26) эквивалентно выражению (3.25), откуда и следует, что оно является решением (3.20).

В работах Эрроу и Дебрю $C_{t'}^{k+1}$ – это пространство состояний. Система стоимости в данном пространстве есть мера π, которая хотя и неотрицательная, но в общем случае не являющаяся вероятностью, на $(C_{t'}^{k+1},\ Q_{t'})$ мера π абсолютно непрерывна с ожиданием по фактической системе вероятности π_1, и производная Радона – Никодима по π_1 равна $d\pi/d\pi_1 = J_W(s)/J_W(t)$.

В уравнениях (3.26) и (3.27) говорится, что стоимость любого платежа равна математическому ожиданию случайного количества продукта, множителя дисконтирования по времени и множителя регулирования риска. Множитель дисконтирования по времени представляет собой совместное влияние локальных предсказуемых процентных изменений богатства. Это наводит на мысль о процедуре, которая осуществляет отдельные последовательные регулировки по времени и неопределенности, но не влечет их, поскольку в общем случае ни один множитель не может быть вынесен из-под знака математического ожидания. По-другому установить результаты можно так: если стоимости измеримы в терминах полезности, когда единицей измерения является планируемая цена J_W, тогда цены всех активов определяются так, чтобы их ожидаемая доходность за любой период владения ими равнялась нулю.

Похожая интерпретация применяется, когда инвестиции совершаются через фирмы, максимизирующие стоимость. Мы можем без потери общности рассматривать фирмы, которые ограничивают свои инвестиции одним производственным процессом. Как упоминалось ранее, такие фирмы будут иметь стимул расширять или сокращать инвестиции в каждый процесс, если совокупное размещение не соответствует прямым инвестициям индивидуумов.

Чтобы связать это с уравнением определения стоимости, рассмотрим совокупное размещение, пропорциональное физическому богатству, инвестированному в каждый процесс, заданное вектором $\overline{a}$. Цены акций фирм могут быть определены так же, как и цены активов. Однако их чистое предложение будет скорее положительным, чем нулевым. Ожидаемая доходность β_i на акции фирмы в i-м производстве была бы задана гипотетическим значением α_i, которое решало бы уравнения (3.10) и (3.11) с $a = \overline{a}$. Строгая вогнутость J подразумевает, что это β_i будет отличаться от действительного технологически определенного α_i всякий раз, когда $\overline{a}$ отличается от a^*.

Количество имеющихся товаров, непрерывно реинвестируемое фирмой в i-й производственный процесс, может быть взято как дополнительная переменная состояния, имеющая ожидаемую норму прибыли α_i.

Применяя уравнение определения стоимости к фирме, обнаруживаем, что ее рыночная стоимость равна физическому количеству производимых товаров плюс стоимость непрерывного потока выплат $\alpha_i - \beta_i$. Рыночная стоимость будет, таким образом, отличаться от физического количества товаров всякий раз, когда $\alpha_i \neq \beta_i$. Следовательно, в равновесии все фирмы без всякого стимула будут расширять или сокращать инвестиции, только когда $\overline{a} = a^*$.

Этим завершим разработку общей равновесной модели простой, но полной экономики, которая использована для изучения стоимости активов. Один из принципиальных результатов главы – дифференциальное уравнение в частных производных, которому должны удовлетворять стоимости активов. Решение этого уравнения определяет равновесную цену данных активов через лежащие в основе реальные переменные экономики. Объединяя это решение с вероятностной информацией об этих переменных, можно получить ответ на широкий спектр вопросов о стохастической структуре стоимости активов.

Разработанной модели дана обтекаемая форма, чтобы сконцентрироваться на самых важных задачах. Дополнительные детали могут быть добавлены обычным образом. Например, мы могли бы ввести множественные товары или нелинейные производственные технологии. В другом примере мы могли бы исследовать, как чередование работы и досуга могло бы воздействовать на стоимости активов, включая работу в производственную функцию и досуг в прямую функцию полезности.

Дальнейшее обобщение следует из того факта, что мы свободно можем включать переменные состояния, которые не оказывают влияния на производственные возможности, но тем не менее находятся в сфере интересов индивидуумов. Не существует причин, по которым изменение этих дополнительных переменных состояния не влияло бы на индивидуальные решения по потреблению. Например, если мы определим $dY_j(t) = C(t)dt$, то изменение Y_j за любой промежуток времени будет неотделимо от потребления за этот промежуток времени. Далее гибкость может быть получена при включении функции полезности временного богатства $B(W(t'),Y(t'))$, зависящей от состояния. В качестве простого примера определим

$$U(C(s),\, Y(s)) = 0,\;\; B(W(t'),\, Y(t')) = \gamma Y_j(t') \;\text{ и }\; dY_j\,(t) = [\gamma \log C(t)]\,Y_j\,(t)dt,$$

где γ – константа (меньше 1) соответствует мультипликативным функциям полезности, изученным в книге Г. Пайи (Pye, 1973).

Таким образом, можно ввести много типов динамических зависимостей посредством предпочтений, при которых наша базовая модель все еще легко поддается анализу.

ГЛАВА 4

ТЕОРИЯ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

§ 1. ОСНОВНАЯ РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ

В этой главе общая равновесная модель определения цены актива предыдущей главы используется для изучения временной структуры процентных ставок. В данной модели предвидения, неприятие риска, инвестиционные альтернативы и предпочтения относительно моментов потребления – все играют свою роль в определении временной структуры. Многие из факторов, традиционно упоминаемых как влияющие на временную структуру, включаются способом, который является полностью согласованным с оптимальным поведением и рациональными ожиданиями. Модель приводит к конкретным формулам для цен облигаций, удобным для практического применения.

Временная структура процентных ставок измеряет соотношение между доходностями свободных от неуплаты ЦБ, которые отличаются только своими сроками до погашения. Определители этого соотношения в течение длительного времени были крайне интересными для экономистов. Предоставляя полное расписание процентных ставок по времени, временная структура воплощает рыночные ожидания будущих событий. Объяснение временной структуры дает нам способ извлечения этой информации и предсказания того, как изменения лежащих в основе переменных будут влиять на кривые доходности.

В детерминированной среде равновесные форвардные ставки должны совпадать с будущими спот-ставками, но когда вводится неопределенность относительно будущих спот-ставок, анализ становится более сложным. Большинство существующих теорий временной структуры берут детерминированную модель как отправную точку и развивают ее путем рассмотрения обобщений детерминированных равновесных соотношений. Литература в этой области огромна и ее современный обзор потребовал бы отдельной главы. Однако при идентификации известные результаты в рассматриваемой области обычно относят к одной из четырех категорий.

Во-первых, имеются различные версии *гипотезы ожидания*. В них основное внимание уделяется ожидаемым значениям будущих спот-ставок или доходов в течение периода владения облигацией. В простейшей форме гипотезой ожидания постулируется, что цены облигации определяются так, чтобы подразумеваемые форвардные ставки равнялись ожидаемым спот-ставкам. В общем случае этот подход характеризуется следующими утверждениями: а) доход от владения долгосрочной облигацией до погашения равен ожидаемому доходу от повторяющихся инвестиций краткосрочных облигаций; б) ожидаемая ставка доходности по следующему периоду владения одинакова для облигаций всех сроков погашения.

Во-вторых, в *гипотезе предпочтения ликвидности*, предложенной Дж. Хиксом (Hicks, 1946), хотя и учитывается важность ожидаемых будущих спот-ставок, но больший вес придается влиянию рисковых предпочтений участников рынка. Согласно этой гипотезе, неприятие риска будет приводить к тому, что форвардные ставки должны быть систематически больше, чем ожидаемые спот-ставки, и эта разница обычно должна увеличиваться со сроком погашения. Такая «премия срока» является прибавкой, требуемой для побуждения инвесторов приобретать долгосрочные («рискованные») ЦБ.

В-третьих, имеется *гипотеза рыночной сегментации* Дж. Калбертсона (Culbertson, 1957), в которой предлагается другое объяснение премии срока. Здесь утверждается, что инвесторы имеют строгие предпочтения относительно сроков погашения и что облигациями разных сроков погашения торгуют на различных рынках. Предполагается, что спрос и предложение облигаций конкретного срока погашения слабо влияют на цены облигаций других сроков погашения. Конечно, теперь нет причин для того, чтобы премии срока были положительными или увеличивались со сроком погашения. Не пытаясь детально критиковать эту точку зрения, заметим, что есть предел тому, насколько далеко можно пойти, чтобы облигации близких сроков погашения не могли заменяться. Возможность замены является важной частью теории, которую мы разрабатываем.

В-четвертых, в *теории предпочтений* Ф. Модиглиани и Р. Сатч (Modigliani, Sutch, 1966) использовали некоторые рассуждения, аналогичные имеющимся в теории сегментации. Однако они поняли ограниченность этих рассуждений и соединили их с элементами других теорий. Модиглиани и Сатч предложили свой подход определения рациональных премий срока, который ограничивает их не в знаке или монотонности, а в необходимости объяснения причинности.

В то время как интерес к такому современному и всестороннему анализу временной структуры для обоснования премий срока желателен, имеются две трудности этого подхода. Во-первых, нам нужно лучше понять, как определять премию срока. Предыдущие теории являются фактически только гипотезами, которые говорят немного более того, что форвардные ставки должны или не должны быть равными ожидаемым спот-ставкам. Во-вторых, все теории оперируют величинами, которые не наблюдаются и не могут быть проверены.

Попытки иметь дело с этими двумя элементами составляют четыре ветви работ по временной структуре. Р. Ролл (Roll, 1970), например, построил и исследовал среднеквадратическую модель, в которой облигации описываются наравне с другими активами, и условия рыночной эффективности используются, чтобы соотнести ненаблюдаемые и проверяемые понятия. Если рациональность требует, чтобы проверяемые реализации не отличались систематически от ненаблюдаемых, то могут быть сделаны статистические тесты для оценивания ненаблюдаемых явлений с помощью проверяемых данных.

В этой главе проблема определения временной структуры рассматривается как элемент общей теории равновесия, и этот подход содержит элементы всех предыдущих теорий. Предвидение будущих событий является важным, так как существуют рисковые предпочтения и характеристики других инвестиционных альтернатив. Инвесторы могут иметь и конкретные временные предпочтения относительно своего потребления, а также область предпочтения. Рассматриваемая модель допускает детальные предсказания о том, какие изменения лежащих в основе переменных будут влиять на временную структуру.

Общая равновесная модель, описанная в гл. 3, является полным динамическим описанием конкурентной экономики в непрерывном времени. Напомним, что в этой экономике имеется единственный товар и в качестве единицы измерения всех стоимостей принята стоимость единицы этого товара. Возможности производства состоят в наборе n линейных операций. Вектор ожидаемых доходностей этих операций обозначается через α, а ковариационная матрица доходностей равна GG'. Компоненты α и GG' будут функциями k-мерного вектора Y, который представляет состояние технологии и сам случайным образом изменяется во времени. Таким образом, эволюция Y определяет производственные возможности, которые будут доступны производству в будущем. Вектор μ определяет ожидаемые изменения Y, а ковариационная матрица этих изменений равна SS'.

Экономика объединяет одинаковых индивидуалов, каждый из которых действует, чтобы максимизировать функцию цели вида

$$E\int_{t}^{t'} U(C(s), Y(s), s)ds,$$

где U – функция полезности Неймана – Моргенштерна; $C(s)$ – поток потребления в момент s; t' – дата завершения деятельности.

При проведении этой максимизации каждый инвестор выбирает свое оптимальное потребление C^*, оптимальную долю a^* богатства W, которую он инвестирует в каждый производственный процесс, и оптимальную долю b^* богатства, которую он инвестирует в каждый актив. Эти активы образуются эндогенно заданными ЦБ, платежи по которым являются функциями W и Y. Остающееся богатство, инвестируемое в заем или ссуду при процентной ставке r, определяется из бюджетных ограничений. Косвенная функция полезности J задается как решение экстремальной задачи.

При равновесии в этом однородном обществе процентная ставка и ожидаемая доходность активов должны подстраиваться, пока все богатство не будет инвестировано в физические процессы производства. Эта инвестиция может быть сделана или непосредственно индивидуумом, или косвенно через фирму. Следовательно, равновесная стоимость J дается решением задачи планирования только с доступными физическими производственными процессами. Для будущего заметим, что условия оптимальности для инвестируемых долей богатства тогда будут иметь вид

$$\Psi \equiv aWJ_W + GS'WJ_{WY} + GG'a^*W^2J_{WW} - \lambda^*\mathbf{1} \le 0, \ a^{*\prime}\Psi = 0, \qquad (4.1)$$

где индексы у J обозначают частные производные; J_{WY} – $(k \times 1)$-вектор, чей i-й элемент равен J_{WY_i}; $\mathbf{1}$ – $(k \times 1)$-вектор, составленный из единиц; λ^* – множитель Лагранжа.

При явно определенной J аналогичные условия оптимальности задачи для активов, займов и ссуд можно объединить с условиями рыночного клиринга для того, чтобы получить равновесные процентную ставку и ожидаемые доходности активов.

Приведем два принципиальных результата гл. 3, которые будут нужны для последующего изложения.

Во-первых, равновесная процентная ставка может быть выписана явно в виде

$$r(W,\ \ Y,\ \ t) = \frac{\lambda^*}{WJ_W} = a^{*\prime}\alpha + a^{*\prime}GG'a^*W\left(\frac{J_{WW}}{J_W}\right) + a^{*\prime}GS'\left(\frac{J_{WY}}{J_W}\right) =$$

$$= a^{*\prime}\,\alpha - \left(\frac{J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{\mathrm{var}W}{W}\right) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{\mathrm{cov}W,\, Y_i}{W}\right), \qquad (4.2)$$

где ($\mathrm{cov}\ W$, Y_i) – взаимная ковариация изменений в оптимально инвестированном богатстве с изменениями переменных состояния, а ($\mathrm{var}W$) и ($\mathrm{cov}\ Y_i$, Y_j) определяются аналогичным образом; заметим, что $a^{*\prime}\alpha$ является доходностью на оптимально инвестированное богатство.

Во-вторых, равновесная стоимость любого случайного иска должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$a^{*\prime}GG'a^*W^2F_{WW}/2 + a^{*\prime}GS'a^*WF_{WY} + \mathrm{tr}(SS'F_{YY})/2 +$$

$$+ (a^{*\prime}\alpha W - C^*)F_W + \mu' F_Y + F_t + \delta\ -\ rF\ = \phi_W F_W + \phi_Y F_Y, \qquad (4.3)$$

где $\delta(W, Y, t)$ – поток платежей, получаемых на ЦБ 'и

$$\phi_W = (a^{*\prime}\alpha - r)W,$$

$$\phi_Y = \left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)a^{*\prime}GS'W + \left(\frac{-J_{WY}}{J_W}\right)' SS'. \qquad (4.4)$$

В уравнении (4.3) индексы у F обозначают частные производные; F_Y и F_{WY} являются $(k \times 1)$-векторами, а F_{YY} – $(k \times k)$-матрицей. Левая часть (4.3) дает превышение ожидаемой доходности на ЦБ над безрисковой доходностью, в то время как правая часть дает рисковую премию, которой ЦБ должна регулироваться в равновесии. Для дальнейшего заметим, что уравнение (4.3) может быть записано в другой форме:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{var} W)F_{WW} + \sum_{i=1}^{k}(\operatorname{cov} W,\, Y_i)F_{WY_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\operatorname{cov} Y_i,\, Y_j)F_{Y_iY_j} +$$

$$+\ [r(W,\ \ Y,\ \ t)W - C^*(W,\ \ Y,\ \ t)]F_W +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}F_{Y_i}\left[\mu_i - \left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} W,\ \ Y_i) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)(\operatorname{cov} Y_i,\ \ Y_j)\right] +$$

$$+\ F_t - r(W, Y, t)F + \delta(W, Y, t) = 0. \qquad (4.5)$$

Для применения формул (4.4) и (4.5) в задаче получения временной структуры процентных ставок определим структуру предпочтения сначала к случаю функций полезности при постоянной относительной нерасположенности к риску, а затем к логарифмической функции полезности. В частности, предположим, что $U(C(s), Y(s), s)$ не зависит от переменной состояния Y:

$$U(C(s),\ s) = e^{-\rho s}\left(\frac{C(s)^{\gamma} - 1}{\gamma}\right),$$

где ρ – фактор дисконтирования, который является постоянным.

Легко показать, что в этом случае косвенная функция полезности принимает вид

$$J(W, Y, t) = f(Y, t)U(W, t) + g(Y, t).$$

Этот частный случай приводит к двум важным упрощениям. Во-первых, коэффициент относительной нерасположенности к риску косвенной функции полезности является постоянным, независимым как от богатства, так и от переменных состояния:

$$\frac{-WJ_{WW}}{J_W} = 1 - \gamma.$$

Во-вторых, эластичность маргинальной полезности богатства по отношению к каждой из переменных состояния не зависит от богатства, и мы имеем

$$\frac{-J_{WY}}{J_W} = \frac{-f_Y}{f}.$$

Кроме того, непосредственно проверяется, будут ли пропорции оптимального портфеля a^* зависеть от Y, а не от W. Следовательно, вектор факторных рисковых премий ϕ_Y может быть приведен к выражению $(1 - \gamma)a^{*\prime}GS' + (f_Y/f)SS'$, которое зависит только от Y. Вдобавок из выражения (4.2) можно получить, что и равновесная процентная ставка также зависит только от Y.

Логарифмическая функция полезности получается в частном случае $\gamma = 0$, при этом $f(Y, t) = [1 - \exp\{-\rho(t' - t)\}]/\rho$. Таким образом, зависимость косвенной функции полезности от состояния проявляется только через $g(Y, t)$. Поэтому ϕ_Y сводится к $a^{*\prime}GS$. Кроме того, частный вид косвенной функции полезности позволяет нам решить уравнение (4.1) относительно a^* в явной форме:

$$a^* = (GG')^{-1}\alpha + \left(\frac{1 - \mathbf{1}'(GG')^{-1}\alpha}{\mathbf{1}'(GG')^{-1}\mathbf{1}}\right)(GG')^{-1}\mathbf{1}, \tag{4.6}$$

когда все производственные процессы являются активными; аналогичное решение имеет место, когда некоторые процессы неактивны.

В дальнейшем будем заниматься определением стоимости только таких ЦБ, контрактные сроки которых явно не зависят от богатства. Так как при постоянной относительной нерасположенности к риску ни процентная ставка r, ни факторная рисковая премия ϕ_Y не зависят от богатства, то для таких ЦБ частные производные F_W, F_{WW} и F_{WY} равны нулю и соответствующие слагаемые в уравнении (4.3) для определения стоимости исчезают.

В этом частном случае мы получаем уравнение (4.3) для определения стоимости в виде

$$\mathrm{tr}(SS'F_{YY})/2 + (\mu' - a^{*\prime}GS')F_Y + F_t + \delta - rF = 0. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) будет основным уравнением определения стоимости в этой главе. Мы используем его при нахождении временной структуры процентных ставок при различных конкретных предположениях о характере технологических изменений.

§ 2. ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В первой модели временной структуры процентных ставок предположим, что состояние технологии можно представить единственной достаточной статистикой или переменной состояния. Это наша самая основная модель, и мы рассмотрим ее более детально. Она будет служить иллюстрацией того, как подробный аналогичный анализ можно провести для более сложных моделей.

Сделаем следующие предположения.

Предположение 4.1. Изменение производственных возможностей во времени описывается одной переменной состояния Y ($\equiv Y_1$).

Предположение 4.2. Средние и дисперсии доходностей производственных процессов пропорциональны Y. В таком случае ни средние, ни дисперсии не будут доминировать в портфельном решении для больших Y. Переменную состояния можно представлять как величину, определяющую скорость эволюции акционерного капитала в следующем смысле. Если мы сравним ситуацию, когда Y равно константе $\widetilde{Y}$, с ситуацией, в которой $Y = 2\widetilde{Y}$, тогда в первой ситуации будет то же самое распределение доходности на фиксированную инвестицию в любом процессе в течение двухлетнего периода, как и во второй ситуации, но за одногодичный период. Предположим, элементы α и G являются такими, что элементы a^*, задаваемые равенством (4.6), положительные, так что все процессы всегда активны, и что $\mathbf{1}'(GG')^{-1}\alpha$ больше единицы. Условие $\mathbf{1}'(GG')^{-1}\alpha > 1$ необходимо, чтобы процентная ставка была всегда неотрицательной. В противном случае, когда $\mathbf{1}'(GG')^{-1}\alpha < 1$, процентная ставка будет всегда неположительной.

Хотя наши предположения не удовлетворяют всем техническим ограничениям роста, наложенным на функцию полезности и коэффициенты производственной функции в предыдущей главе, их объединение приводит к корректно поставленной задаче, имеющей оптимальное решение со многими полезными свойствами. Функция оптимального потребления имеет вид

$$C^*(W, Y, t) = [\rho/(1 - \exp(-\rho(t - t')))]W,$$

а косвенная функция полезности имеет вид

$$J(W, Y, t) = a(t)\ln W + b(t)Y + c(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – функции времени, определяемые в явной форме.

Предположение 4.3. Изменение переменной состояния задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY(t) = [\xi Y + \zeta]dt + v\sqrt{Y}\,dw(t), \tag{4.8}$$

где ξ, ζ – константы и $\zeta \geq 0$, а v – $[1\times(n + k)]$-вектор, каждая компонента которого является постоянной и равной v_0.

Такая структура позволяет ввести более удобные для анализа обозначения $\alpha \equiv \hat{\alpha} Y$, $GG' \equiv \Omega Y$, $GS' \equiv \Sigma Y$, где коэффициенты $\hat{\alpha}$, Ω и Σ являются константами.

С такими предположениями относительно технологических процессов и принятыми ранее предположениями о предпочтениях можно, пользуясь равенством (4.2), выписать выражение для равновесной процентной ставки в виде

$$r(Y) = \left(\frac{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}}\right)Y. \tag{4.9}$$

Таким образом, процентная ставка следует диффузионному процессу с дрейфом

$$\operatorname{drift} r = \left(\frac{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}}\right)(\xi Y + \zeta) \equiv k(\theta - r),$$

$$\operatorname{var} r = \left(\frac{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}}\right)v'Y \equiv \sigma^2 r, \tag{4.10}$$

где k, θ и σ^2 являются константами такими, что $k\theta \geq 0$, $\sigma^2 > 0$.

Удобно определить новый одномерный винеровский процесс $dz_1(t)$ такой, что

$$\sigma\sqrt{r}dz_1(t) \equiv v\sqrt{Y}dw(t).$$

Это возможно, так как каждая компонента $w(t)$ является винеровским процессом. Динамика процентной ставки тогда может быть выражена как

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}\,dz_1(t). \tag{4.11}$$

Для k, $\theta > 0$ это соответствует процессу авторегрессии первого порядка в непрерывном времени, когда случайно изменяющаяся процентная ставка эластично притягивается к центральному уровню или установившемуся значению θ. Параметр k определяет скорость этого установления.

Проверка выполнения условий классификации границ показывает, что r может достигать нуля, если $\sigma^2 > 2k\theta$. Если $\sigma^2 \le 2k\theta$, стремление дрейфа вверх достаточно велико, что делает нулевой уровень недостижимым (Feller, 1951). Во всяком случае обращение в нуль коэффициента диффузии в нуле подразумевает, что исходная неотрицательная процентная ставка в последующем никогда не будет отрицательной.

Следовательно, поведение процентной ставки, определяемое такими условиями, имеет следующие эмпирически подтверждаемые свойства: 1) отрицательные значения процентных ставок исключаются; 2) если процентная ставка достигает нуля, она может в последующем стать положительной; 3) абсолютное значение дисперсии процентной ставки увеличивается, если процентная ставка сама возрастает; 4) для процентной ставки существует стационарное распределение.

Условная плотность вероятностей процентной ставки в момент времени s при фиксированном ее значении в текущий момент времени t задается выражением

$$f(r(s), s; r(t), t) = c\,e^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q\left(2\sqrt{uv}\right), \tag{4.12}$$

где

$$c \equiv \frac{2k}{\sigma^2[1-e^{-k(s-t)}]},\ u \equiv cr(t)e^{-k(s-t)},\ v \equiv cr(s),\ q \equiv \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1,$$

а $I_q(.)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q.

Функция распределения (4.12) является нецентральным хи-квадрат распределением $\chi^2\,[2cr(s);\ 2q + 2,\ 2u]$ с $2q + 2$ степенями свободы и параметром нецентральности $2u$, пропорциональным текущей спот-ставке. Процесс, аналогичный (4.11), подробно изучен В. Феллером (1951). Им получено преобразование Лапласа плотности (4.12).

Прямые вычисления дают математическое ожидание и дисперсию $r(s)$ в следующей форме:

$$E(r(s)\,|\,r(t)) = r(t)e^{-k(s-t)} + \theta\,(1 - e^{-k(s-t)}), \tag{4.13}$$

$$\operatorname{var}(r(s)\,|\,r(t)) = r(t)\left(\frac{\sigma^2}{k}\right)(e^{-k(s-t)} - e^{-2k(s-t)}) + \theta\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right)(1 - e^{-k(s-t)})^2.$$

Свойства распределения будущих процентных ставок получаются так, как и ожидается. Когда k неограниченно возрастает, среднее значение стремится к θ, а дисперсия – к нулю. В то же время, когда k обращается в нуль, условное среднее превращается в текущее значение процентной ставки, а дисперсия равна $\sigma^2 r(t)(s - t)$.

Если процентная ставка проявляет свойство возвращения к среднему (k, $\theta > 0$), тогда, если s становится большим, ее распределение будет приближаться к гамма-распределению. Плотность вероятностей значений установившейся процентной ставки имеет вид

$$f(r(\infty), \infty; r(t), t) = \frac{\omega^{\nu}}{\Gamma(\nu)} r^{\nu-1} e^{-\omega r},$$

где $\omega \equiv 2k/\sigma^2$ и $\nu \equiv 2k\theta/\sigma^2$. Установившимися значениями среднего и дисперсии соответственно являются θ и $\sigma^2\theta/2k$.

Теперь рассмотрим проблему определения стоимости свободной от неуплаты бескупонной облигации, по которой выплачивается одна денежная единица в момент времени T. Условий контракта обычно достаточно, чтобы предотвратить риск дефолта и сделать стоимость облигации независимой от богатства ее продавца. Например, условия выпуска облигации могут определяться так, что продавец должен выкупить облигацию по согласованной цене, когда его богатство уменьшается до определенного уровня. Цены этих облигаций для всех T будут полностью определяться временной структурой. При наших предположениях факторная премия риска в (4.7) равна

$$\left[\hat{\alpha}'\Omega^{-1}\Sigma + \left(\frac{1 - \mathbf{1}'\Omega^{-1}\hat{\alpha}}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}}\right)\mathbf{1}'\Omega^{-1}\Sigma\right]Y \equiv \lambda Y.$$

Используя уравнение (4.7) и выражение для процентной ставки (4.10), можем заметить, что основное уравнение цены P дисконтной облигации удобнее записать как

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+k(\theta-r)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial t}-\lambda r\frac{\partial P}{\partial r}-rP=0 \qquad (4.14)$$

с граничным условием $P(r, T, T) = 1$. Первые три члена в уравнении (4.14), согласно формуле Ито, определяют ожидаемое изменение цены облигации. Таким образом, ожидаемая доходность облигации равна $r+\frac{\lambda r}{P}\frac{\partial P}{\partial r}$. Мгновенная премия доходности облигации пропорциональна эластичности ее процентов. Множитель λr является ковариацией между изменением процентной ставки и изменением доли оптимально инвестированного богатства («рыночного портфеля»). Так как по экономическому смыслу производная $\partial P/\partial r < 0$, премии будут положительными, если эта ковариация отрицательная ($\lambda < 0$).

Из уравнения (4.14) можно увидеть, что цены облигации зависят только от одной случайной переменной, текущей (спот) процентной ставки, которая служит в качестве инструментальной переменной для основной технологической неопределенности. Хотя предположение о том, что текущие (и будущие) процентные ставки играют важную роль в определении временной структуры, в общем подтверждается, однако это строго верно только при определенных условиях. В рамках этого анализа наиболее важные обстоятельства, достаточные для того, чтобы цены облигации зависели только от спот-процентной ставки, следующие: 1) инвесторы имеют постоянное относительное неприятие риска, технологическая неопределенность может быть описана единственной переменной и процентная ставка является монотонной функцией этой переменной; 2) технологические изменения нестохастические и процентная ставка – монотонная функция богатства.

Вычислив соответствующее математическое ожидание (см. гл. 3), получим цену облигации в виде

$$P(r, t, T) = A(t, T)\exp[-B(t, T)\, r], \qquad (4.15)$$

где

$$A(t, T) \equiv \left[\frac{2\gamma\exp[(k+\lambda+\gamma)(T-t)/2]}{(\gamma+k+\lambda)(\exp[\gamma(T-t)]-1)+2\gamma}\right]^{2k\theta/\sigma^2},$$

$$B(t,\, T) \equiv \frac{2(\exp[\gamma(T-t)]-1)}{(\gamma+k+\lambda)(\exp[\gamma(T-t)]-1)+2\gamma},$$

$$\gamma \equiv \sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}.$$

Цена облигации будет убывающей выпуклой функцией процентной ставки и возрастающей (убывающей) функцией времени (срока погашения). Параметры процесса процентной ставки влияют следующим образом. Цена облигации является убывающей выпуклой функцией среднего уровня процентной ставки θ и возрастающей вогнутой (убывающей выпуклой) функцией параметра скорости установления k, если процентная ставка больше (меньше), чем θ. Оба эти результата непосредственно следуют из того, как эти параметры влияют на ожидаемую будущую процентную ставку. Цена облигации является увеличивающейся вогнутой функцией параметра «рыночного» риска λ. Интуитивно это в основном объясняется тем, что более высокие значения λ дают более высокую ковариацию процентной ставки с богатством. Таким образом, при большем λ более вероятно, что цена облигации будет выше, когда богатство на низком уровне, и, следовательно, имеет большую маргинальную полезность. Цена облигации – возрастающая вогнутая функция дисперсии процентной ставки σ^2. Здесь имеется несколько эффектов. Наиболее важным является то, что большее значение σ^2 свидетельствует о большей неопределенности относительно будущих возможностей реального производства, и о большей неопределенности будущего потребления. На таком рынке отвергающие риск инвесторы ценили бы гарантированную отдачу облигации более высоко.

Динамика цены облигации определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dP = r[1-\lambda B(t,\, T)]Pdt - B(t,\, T)P\sigma\sqrt{r}\, dz_1.$$

Для этой модели с одной переменной состояния доходность облигации строго отрицательно коррелирована с изменениями процентной ставки. Доходность изменяется меньше, когда процентная ставка низкая. Действительно, они становятся даже детерминированными, когда процентная ставка достигает нуля, так как тогда изменения процентной ставки становятся детерминированными. Интуитивно ожидается, что какие бы значения не принимали другие переменные, изменчивость доходности уменьшается, когда облигация достигает погашения. На самом деле, позволяя t достигать T и обозначая $T - t$ через τ, находим, что ожидаемая доходность равна $r\tau + O(\tau^2)$ и дисперсия доходности имеет порядок $O(\tau^2)$, а не $O(\tau)$, как было бы в случае доходности на инвестицию в производственный процесс в течение короткого интервала. В этом смысле доходность на очень краткосрочную облигацию становится детерминированной.

Облигации обычно котируются в терминах доходностей, а не цен. Для бескупонных облигаций всегда котируется доходность до погашения (*yield to maturity*) $R(r, t, T)$, которая определяется из выражения $P(r, t, T) = \exp[-(T-t)R(r, t, T)]$. Таким образом,

$$R(r, t, T) = [rB(t, T) - \ln A(t, T)]/(T - t).$$

Когда приближается погашение, доходность до погашения приближается к текущей процентной ставке независимо от того, какие значения принимают другие параметры. Если же рассматривать увеличение времени до погашения, доходность достигает предела, который не зависит от текущей процентной ставки:

$$R(r, t, \infty) = \frac{2k\theta}{\gamma + k + \lambda}.$$

Когда спот-ставка меньше долгосрочной доходности, временная структура равномерно увеличивается. При процентной ставке, превышающей $k\theta/(k + \lambda)$, временная структура понижается. Для промежуточных значений процентной ставки кривая доходности имеет экстремум.

Другую сравнительную статику для кривой доходности получаем из вида функции цены облигации. Возрастание текущей процентной ставки увеличивает доходности для всех сроков погашения, но его влияние сильнее для коротких сроков погашения. Аналогично возрастание установившегося среднего θ увеличивает все доходности, но в этом случае влияние больше для продолжительных сроков погашения. Доходность до погашения убывает, когда σ^2 и λ возрастают, в то время как влияние изменения k может быть различным в зависимости от текущего значения процентной ставки.

Всегда значителен интерес к несмещенному предсказанию будущих процентных ставок. В настоящей ситуации мы могли бы работать с уравнением (4.13), которое дает ожидаемые значения будущей процентной ставки через текущую ставку и параметры k и θ. Однако в сконструированной нами модели рациональных ожиданий вся информация, которая имеется в текущий момент о будущих изменениях процентных ставок, неявно содержится в текущих ценах облигаций и временной структуре. Если модель правильная, тогда любой отдельный параметр можно определить из временной структуры и значений других параметров.

Этот метод особенно важен, когда модель расширяется, чтобы допускать зависимость от времени функции дрейфа $\theta(t)$. Тогда мы можем использовать информацию, содержащуюся во временной структуре, чтобы получить $\theta(t)$ и ожидаемые будущие спот-ставки, не используя априорных ограничений на их функциональный вид.

Далее будущие ожидаемые спот-ставки, задаваемые формулами (4.13), сводятся к следующему:

$$E(r(T)|r(t)) = r(t)\, e^{-k(T-t)} + k\int_t^T \theta(s)\, e^{-k(T-t)} ds. \tag{4.16}$$

Формула (4.15) для цены облигации, в свою очередь, преобразуется к виду

$$P(r, t, T) = \widehat{A}(t, T) \exp[-B(t, T)r], \tag{4.17}$$

где

$$\widehat{A}(t, T) = \exp\left(-k\int_t^T \theta(s) B(s, T) ds \right), \tag{4.18}$$

что превращается в равенство (4.15), когда функция $\theta(t)$ становится константой.

Предполагая для примера, что другие параметры процесса известны, можно использовать временную структуру для определения несмещенного прогноза будущих процентных ставок. Согласно формуле (4.17), $\widehat{A}(t, T)$ является наблюдаемой функцией переменной T при заданной временной структуре и известном виде функции $B(t, T)$; стандартный метод можно применить для инверсии (4.18) и получения выражения для $\theta(t)$ через $\widehat{A}(t, T)$ и $B(t, T)$. Уравнение (4.16) теперь можно использовать для получения предсказания ожидаемых значений будущих спот-ставок, неявно содержащихся в текущей временной структуре.

Заметим, что получаются не те же значения, которые задавались бы традиционными предположениями об ожиданиях, что ожидаемые значения будущих спот-ставок содержатся во временной структуре в виде подразумеваемых форвардных ставок. В модели непрерывного времени форвардная ставка $\widehat{r}(T)$ задается выражением $\frac{-1}{P}\frac{\partial P}{\partial T}$. Тогда путем дифференцирования равенства (4.17) получим

$$\widehat{r}(T) = \frac{-1}{P(r, t, T)}\frac{\partial P(r, t, T)}{\partial T} = r\frac{\partial B(t, T)}{\partial T} + k\int_t^T \theta(s)\frac{\partial B(s, T)}{\partial T}ds. \quad (4.19)$$

Сравнивая выражения (4.16) и (4.19), мы видим, что они имеют одинаковую структуру. Однако в традиционном прогнозе форвардной ставки (4.19) используется весовой коэффициент $\frac{\partial B(s, T)}{\partial T} \neq e^{-k(T-t)}$, что приводит к смещенным предсказаниям.

Рассмотрим ряд других конкретизаций временной зависимости путем небольшой модификации модели. Частным случаем может служить предположение, что процентная ставка имеет вид $\bar{r}(t) + g(t)$, где $\bar{r}(t)$ задается уравнением (4.11), а $g(t)$ – функция, обеспечивающая положительность нижней границы процентной ставки. Существенным моментом в этом случае является то, что в модели рационального ожидания текущая временная структура олицетворяет информацию, требуемую для определения рыночного распределения вероятностей будущего курса процентной ставки. Кроме того, временная структура может быть инвертирована для нахождения этих ожиданий.

Другие модификации технологических изменений с единственной переменной будут, в свою очередь, вызывать другие стохастические свойства процентной ставки. Легко проверить, что в нашей модели, если α и GG' пропорциональны некоторой функции $h(Y, t)$, тогда процентная ставка будет также пропорциональна этой функции. Путем удобного выбора функций $h(Y, t)$, $\mu(Y, t)$ и $S(Y, t)$ можно предусмотреть широкий диапазон априорных свойств изменений процентной ставки для построения полностью состоятельной модели.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ АКТИВОВ С ВЫПЛАТОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Разработанную схему определения стоимости можно применить к другим ЦБ, выплаты которых зависят от процентной ставки, к таким как опционы на облигации и фьючерсы на облигации. Эта гибкость позволяет создавать модели предсказания относительно цен активов одновременно на нескольких финансовых рынках. Следовательно, применение к другим ЦБ может допускать более мощные эмпирические тесты, чем те, которые применяются только к одной облигации.

В качестве примера определения стоимости другого сорта активов, зависимых от процентной ставки, рассмотрим опционы на облигации. Обозначим через $C(r, t, T; s, K)$ стоимость в момент t опциона-колл на дисконтную (бескупонную) облигацию с датой погашения s, ценой исполнения K и датой истечения T. Так как лежащий в основе актив, дисконтная облигация, не делает платежей в течение срока действия опциона, анализ Мертона (см. ч. 1, гл. 2, § 3) показывает, что преждевременное исполнение никогда не является оптимальным и, следовательно, американский и европейский коллы имеют одинаковую стоимость. Цена опциона удовлетворяет основному уравнению определения стоимости с краевым условием

$$C(r, t, T; s, K) = \max[P(r, T, s) - K, 0].$$

Понятно, что $s \geq T \geq t$ и K не превышает $A(T, s)$, максимально возможной цены облигации в момент времени T, так как в противоположном случае опцион никогда не будет исполнен и был бы бесполезен. Снова путем вычисления соответствующих математических ожиданий получим следующую формулу для цены опциона:

$$C(r, t, T; s, K) = P(r, t, s) \times$$
$$\times \chi^2\left(2r^*[\phi + \psi + B(T, \ s)];\ \frac{4k\theta}{\sigma^2},\ \frac{2\phi^2 r e^{\gamma(T-t)}}{\phi + \psi + B(T, \ s)}\right) -$$
$$-KP(r, t, T)\chi^2\left(2r^*[\phi + \psi];\ \frac{4k\theta}{\sigma^2},\ \frac{2\phi^2 r e^{\gamma(T-t)}}{\phi + \psi}\right),$$

где

$$\gamma \equiv \sqrt{(k+\lambda)^2 + 2\sigma^2}, \ \ \phi \equiv \frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}, \ \ \psi \equiv \frac{k+\lambda+\gamma}{\sigma^2},$$

$$r^* \equiv \left[\ln\left(\frac{A(T,\, s)}{K}\right)\right] \Big/ B(T,\, s);$$

$\chi^2(.)$ – введенная ранее функция нецентрального хи-квадрат распределения; r^* – критическое значение процентной ставки, ниже которого будет происходить исполнение, т. е. $K = P(r^*, T, s)$.

Стоимость опциона-колл – возрастающая функция срока истечения (когда дата погашения лежащей в основе облигации остается фиксированной). Стоимости опционов-колл на акции – возрастающие функции процентной ставки, поскольку увеличение ставки снижает настоящую стоимость цены исполнения. Однако здесь увеличение процентной ставки будет также уменьшать цену лежащей в основе облигации. Численный анализ показывает, что последний эффект сильнее и что стоимость опциона является убывающей выпуклой функцией процентной ставки.

§ 4. СРАВНЕНИЕ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ЦЕНЫ ОБЛИГАЦИИ АРБИТРАЖНЫМИ МЕТОДАМИ

Кратко сравним разработанную методологию с некоторыми другими способами определения цены облигации в непрерывном времени. Полезно сделать это теперь, а не позже, поскольку модель, представленная в гл. 2 (§ 2), является идеальным стандартом для сравнения.

Начнем с детального описания лежащей в основе экономики. Оно позволяет нам идентифицировать следующие составляющие процедуры определения цены облигации:

а) переменные, от которых зависит цена облигации;

б) стохастические свойства лежащих в основе переменных, которые определяются эндогенно (*endogenously*);

в) явный вид факторных рисковых премий (*factor risk premium*).

Р. Мертон (1970) показывает, что если начинать вместо этого только с принятия предположений а) и б), тогда формулу Ито можно использовать, чтобы установить превышение ожидаемого дохода на облигацию в том же виде, что и левая часть уравнения (4.3). Если функциональный вид правой части уравнения (4.3) известен, тогда можно получить уравнение для определения цены облигации. Например, если произвольно предположить, что цена облигации зависит только от текущей процентной ставки r, которая следует процессу, удовлетворяющему уравнению (4.11), и что превышение ожидаемого дохода на облигацию с датой погашения T равно $Y(r, t, T)$, тогда получаем

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + k(\theta - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = Y(r, t, T). \qquad (4.20)$$

Если имеется какое-либо лежащее в основе равновесие, удовлетворяющее предположениям а) и б), тогда должна существовать некоторая функция Y, для которой цена облигации задается уравнением (4.20). Однако, как замечает Мертон, этот вывод сам по себе не обеспечивает никакого способа определить функцию Y или отнести ее к лежащим в основе переменным.

Арбитражный подход определения цены облигации был разработан в статьях M. Brennan, E. Schwartz (1979), L. Dothan (1978), M. German (1977), S. Richard (1978), Vasiček (1977). При его применении аргументы, подобные тем, которые были в доказательстве теоремы 2 (гл. 4), используются, чтобы показать: если не имеется арбитражных возможностей, функция Y должна иметь вид

$$Y(r, t, T) = \psi(r, t)\ \frac{\partial P(r, t, T)}{\partial r}, \qquad (4.21)$$

где $\psi(r, t)$ является функцией, зависящей только от календарного времени и не зависящей от даты погашения облигации. Это налагает некоторые ограничения на вид превышения ожидаемого дохода, так как не все функции Y будут удовлетворять одновременно уравнениям (4.20) и (4.21).

Однако имеются некоторые потенциальные проблемы в дальнейшем продвижении и использовании арбитражного подхода для определения полностью конкретизированной модели временной структуры. Сам подход не содержит никакого способа, гарантирующего наличие некоторого лежащего в основе равновесия, для которого предположения а) и б) являются состоятельными. Оставляя эту проблему в стороне, сталкиваемся с другой трудностью, проистекающей из того факта, что арбитражный подход не предполагает, что всякий выбор ψ в соотношении (4.21) приведет к цене облигации, которая не допускает арбитражных возможностей. Действительно, определение модели посредством конкретизации функционального вида ψ может привести к внутренней несостоятельности.

В качестве примера потенциальных возможностей метода рассмотрим уравнение (4.20) с функцией Y, определяемой соотношением (4.21). Это дает уравнение определения стоимости в виде

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+k(\theta-r)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial t}-rP=\psi(r,\, t)\ \frac{\partial P(r,\, t,\, T)}{\partial r}, \tag{4.22}$$

которое идентично уравнению (4.14) с точностью до конкретизации функции ψ. Мы должны теперь конкретизировать модель путем предположения о том, что ψ является линейной относительно текущей процентной ставки, $\psi(r,\, t) = \psi_0 + \lambda r$. Тогда решение уравнения (4.22) имеет вид

$$P(r,\ t,\, T)=[A(t,\, T)]^{(k\theta-\psi_0)/k\theta}\exp[-rB(t,\, T)],$$

а динамика поведения цены облигации задается уравнением

$$dP = [r-(\psi_0+\lambda r)B(t,\, T)]Pdt - B(t,\, T)\sigma\sqrt{r}\,Pdz_1.$$

Линейная форма рисковой премии оказывается разумной и была бы подходящей для выбора при эмпирической работе, но на практике она порождает нежизнеспособную модель. Это проще всего увидеть, когда $r = 0$. В таком случае доходность облигации в последующие моменты времени является безрисковой, тем не менее она повышается в цене при ставке $-\psi_0 B(t,\, T)$, которая отличается от процентной ставки, превышающей нулевой уровень. Как было установлено ранее, нулевой уровень достигается, если $\sigma^2 > 2k\theta$. Можно использовать некоторые более сложные аргументы, чтобы показать, что модель нежизнеспособна, даже если нулевой уровень недостижим. Таким образом, мы имеем модель, которая гарантирует арбитражные возможности, а не их предотвращение. Трудностью, конечно, является то, что нет лежащего в основе равновесия, которое удовлетворяло бы предполагаемым премиям.

Таким образом, разработанный в этой главе равновесный подход имеет два важных преимущества перед другими методами определения цены облигации в непрерывном времени. Во-первых, он автоматически страхует, чтобы модель полностью определялась без потери внутренней состоятельности; во-вторых, обеспечивает способ предсказания того, как изменения лежащих в основе реальных экономических переменных будут влиять на временную структуру.

§ 5. МНОГОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕН КАК ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В § 2 мы конкретизировали схему общей равновесной модели (см. гл. 3) для разработки полной модели определения цены облигации. Мы специально выбрали простой случай для того, чтобы показать в деталях, как такая модель может быть построена. В модели цены облигации всех сроков погашения зависели от единственного случайного возмущающего фактора, текущей (спот) процентной ставки. Хотя результирующая временная структура может принимать различные формы, для модели с единственным возмущающим фактором характерно то, что изменения цен облигации всех сроков погашения совершенно коррелированы. Такая модель также подразумевает, что цены облигации не зависят от траектории, которой следовала спот-ставка, прежде чем достичь текущего значения. В некоторых случаях эти свойства могут ограничить применение модели.

Однако более общие аналитические возможности будут, в свою очередь, подразумевать более общие модели определения цен облигаций. Получаемые в результате многофакторные временные структуры будут более гибкими, чем однофакторная модель, но они неизбежно будут также более громоздкими и более трудными для анализа.

Для иллюстрации возможностей разработанной модели мы рассмотрим два ее непосредственных обобщения. Предположим, что в нашем описании технологического изменения в уравнении (4.8) и соотношениях (4.10) сам параметр установившегося среднего θ может изменяться случайным образом согласно уравнению

$$d\theta = v(Y - \theta)dt,$$

где v является положительной константой. Это значит, что мы полагаем $\theta \equiv Y_2$ и $\mu_2 = v(Y_1 - Y_2)$. Таким образом, значение θ в любой момент времени будет интегралом экспоненциально взвешенных прошлых значений Y. Можно проверить, что тогда процентная ставка r снова определяется уравнением (4.9) и что цена облигации P будет иметь следующий вид:

$$P(r, \theta, t, T) = \exp[-r f(t, T) - \theta g(t, T)],$$

где функции времени f и g определяются в явном виде. В этом случае как доходность до погашения дисконтной облигации, так и ожидаемые значения будущих спот-ставок являются линейными функциями текущей и прошлых значений спот-ставок.

В качестве второго обобщения предположим, что коэффициенты производства α и GG' пропорциональны сумме двух независимых случайных величин Y_1 и Y_2, каждая из них удовлетворяет уравнению вида (4.8). Тогда можно показать, что процентная спот-ставка r будет пропорциональна сумме Y_1 и Y_2 и что цена облигации будет снова иметь экспоненциальный вид:

$$P(r, Y_2, t, T) = h(t, T) \exp[-rf(t, T) - \theta g(t, T)],$$

где h, f и g – другие функции времени, определяемые в явном виде. В такой модели изменения цен облигаций различных сроков погашения больше не являются полностью коррелированными.

Каждое из обобщений дает двухфакторную модель временной структуры, и результирующие кривые доходности могут предполагать широкое разнообразие форм. Таким же способом могут быть сконструированы дальнейшие многофакторные обобщения.

В каждой из рассмотренных моделей одна из переменных не наблюдается непосредственно. Многофакторные обобщения будут обычно наследовать этот недостаток в увеличивающейся с числом факторов степени. Следовательно, для эмпирических применений может быть очень удобно использовать некоторые эндогенно определяемые цены как инструментальные переменные для того, чтобы устранять переменные, которые не могут наблюдаться непосредственно. В определенных случаях это будет сделать возможно. Выберем спот-ставку r и вектор долгосрочных процентных ставок l в качестве инструментальных переменных. В общем случае каждая из этих процентных ставок оказывается функцией богатства W (если общая функция полезности не является равномерно эластичной) и всех переменных состояния. Если можно инвертировать эту систему глобально и выразить переменные состояния как дважды дифференцируемые функции r и l, тогда r и l можно использовать как инструментальные переменные способом, согласующимся с общей схемой равновесия.

Предположим, что имеются две переменные состояния Y_1 и Y_2 и что полезность равномерно эластична, так что уровень богатства несуществен. Тогда для скалярных инструментальных переменных r и l прямые вычисления показывают, что уравнение определения стоимости (4.3) можно переписать как

$$\frac{1}{2}(\mathrm{var}r)\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\mathrm{cov}(r,l)\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial l}+\frac{1}{2}(\mathrm{var}l)\,\frac{\partial^2 F}{\partial l^2}+$$

$$+[\mu_r-\lambda_r(r,l)]\frac{\partial F}{\partial r}+[\mu_l-\lambda_l(r,l)]\frac{\partial F}{\partial l}-rF+\frac{\partial F}{\partial t}+\delta=0. \quad (4.23)$$

Функции λ_r и λ_l играют роль коэффициентов рисковых премий в соотношениях (4.4). Они связаны с коэффициентами рисковых премий ϕ_Y соотношениями

$$\lambda_r(r,l)=\left[\psi_1\frac{\partial g}{\partial l}-\psi_2\frac{\partial f}{\partial l}\right]\Big/\Delta,$$

$$\lambda_l(r,l)=\left[\psi_2\frac{\partial f}{\partial r}-\psi_1\frac{\partial g}{\partial r}\right]\Big/\Delta,$$

где

$$\psi_1(r,l,t)=\phi_{Y_1}(Y_1,Y_2,t);\quad \psi_2(r,l,t)=\phi_{Y_2}(Y_1,Y_2,t);$$

$$Y_1\equiv f(r,l,t),\quad Y_2\equiv g(r,l,t),\quad \Delta\equiv\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial l}-\frac{\partial f}{\partial l}\frac{\partial g}{\partial r}.$$

Таким образом, поскольку мы не используем то, что l является процентной ставкой, преобразование (4.3) в (4.23) можно переформулировать для произвольной инструментальной переменной, если инверсия возможна. Преимущество выбора процентной ставки в качестве инструментальной переменной состоит в том, что второй коэффициент рисковой премии λ_l и дрейф μ_l можно исключить из уравнения (4.23) следующим образом.

Пусть Q обозначает стоимость конкретной облигации, для которой l – непрерывно конвертируемая доходность до погашения. Обозначим поток платежей облигации, включая как купоны, так и доход от инвестированного капитала, через $c(t)$. В общем случае этот поток будет нулевым большую часть времени с импульсами, представляющими неограниченную интенсивность выплат в моменты платежей. По определению $Q \equiv \int_t^T c(s)\exp[-l(s-t)]ds$, и мы можем написать

$$Q \equiv \Lambda_0(l), \quad \frac{\partial Q}{\partial l} = \Lambda_1(l), \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial l^2} = \Lambda_2(l),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\, c(t) + l\Lambda_0(l) = -\,\delta\; + l\Lambda_0(l),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial r \partial l} = 0,$$

где

$$\Lambda_n \equiv \int_t^T (t-s)^n c(s) e^{-l(s-t)} ds,$$

и интеграл должен интерпретироваться по Стильтьесу. Если эти выражения подставить в (4.23), то получим

$$\mu_l - \lambda_l(r, l) = \frac{(r-l)\Lambda_0(l) - 0{,}5(\operatorname{var} l)\Lambda_2(l)}{\Lambda_1(l)}, \tag{4.24}$$

и ненаблюдаемый коэффициент рисковой премии можно заменить наблюдаемой функцией (4.24). Если Q является консольной (бессрочной) облигацией с купонами, выплачиваемыми непрерывно с нормой c, тогда $\Lambda_0 = c/l$, $\Lambda_1 = -c/l^2$, $\Lambda_2 = 2c/l^3$ и равенство (4.24) можно переписать как (см. Brennan, Schwartz, 1979)

$$\mu_l - \lambda_l(r, l) = \frac{\operatorname{var}(l)}{l} + l(l-r).$$

Эти представления могут быть полезной стартовой точкой для эмпирической работы. Однако важно вспомнить, что они не могут быть полностью оправданы без рассмотрения характеристик лежащей в основе экономики. В дополнение к проведенному анализу двухмерных моделей рассмотрим некоторые многомерные модели, которые можно переформулировать таким же образом.

§ 6. СЛУЧАЙНАЯ ИНФЛЯЦИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ НОМИНАЛЬНЫХ ОБЛИГАЦИЙ

Модель, представленная здесь, связана с реальной экономикой, в которой деньги не являются самоцелью. Чтобы обеспечить обоснованную роль деньгам, нам нужно было бы ввести дополнительные показатели, которые увели бы далеко от нашего первоначального намерения. Однако для экономической среды, в которой изменение запаса денег не имеет какого-либо реального влияния, можно ввести некоторые свойства денег и инфляцию искусственным способом с помощью предположений о том, что одна из переменных состояния показывает уровень цен и что выплаты по некоторым контрактам имеют реальные стоимости, зависящие от этого уровня цен. То есть они определяются в номинальных терминах. Ни одно из этих предположений не влечет каких-либо изменений в общей теории.

Предположим, что k-я переменная состояния характеризует уровень цен p. Так как мы предположили, что эта переменная не имеет никакого влияния на лежащее в основе реальное равновесие, функции α, μ, G, S и J не будут зависеть от p. Конечно, это не означает, что изменения p статистически не коррелированы с изменениями реального богатства и другими переменными состояния. В таких обстоятельствах реальная стоимость актива, выплаты по которому определяются в номинальных терминах, еще удовлетворяют уравнению (4.3). Все, что нужно теперь сделать – это выразить номинальные выплаты в реальных терминах для граничных условий. Другими словами, уравнение определения стоимости (4.3) будет все еще справедливым, если p является дифференцируемой функцией W, Y и t. Если желательно поддерживать баланс в реальных деньгах через прямую функцию полезности U, здесь это можно сделать непосредственно. Стратегия максимизации полезности денежного запаса зависела бы только от переменных состояния, реального богатства и времени, поэтому индуцируемый уровень цен также зависел бы только от этих переменных.

Проиллюстрируем некоторые из этих положений относительно модели, представленной в гл. 2 (§ 2). Возьмем в качестве второй переменной состояния уровень цен p ($\equiv Y_2$) и рассмотрим, как определить стоимость ЦБ, по которой в момент T выплачивается сумма $1/p(T)$. Назовем ее номинальной единичной дисконтной облигацией и обозначим ее настоящую стоимость в момент t в реальных терминах через $N(r, p, t, T)$. Предположим, что уровень цен p изменяется в соответствии с уравнением

$$dp = \mu(p)dt + \sigma(p)dw_{n+2}(t) \tag{4.25}$$

и что он не коррелирован с W и Y_1. Предположим также, что коэффициенты в уравнении (4.25) являются такими, что $E[p^{-1}(s)]$ существует для всех конечных s.

Тогда будем иметь уравнение определения стоимости для N

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 N}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\sigma^2(p)\frac{\partial^2 N}{\partial p^2}+[k\theta-(k+\lambda)r]\frac{\partial N}{\partial r}+\mu(p)\frac{\partial N}{\partial p}+\frac{\partial N}{\partial t}-rN=0$$

с краевым условием $N(r, p, T, T) = 1/p(T)$. Можно непосредственно проверить, что решением является

$$N(r, p, t, T) = P(r, t, T)\, E[p^{-1}(T)|t,\ p(t)],$$

где P – цена реальной дисконтной облигации, определяемой выражением (4.15).

В этой формулировке ожидаемая ставка инфляции изменяется только с изменением уровня цены. Однако для обычно используемого случая логарифмически распределенных цен $\mu(p) = \mu_p p$, $\sigma(p) = \sigma_p p$ и

$$N(r, p, t, T) = e^{-(\mu_p-\sigma_p^2)(T-t)}P(r, t, T)/p(t),$$

так что в этом случае цена номинальной облигации в номинальных терминах $\widehat{N} \equiv p(t)N$ будет независимой от текущего уровня цен. При логарифмически распределенных ценах ожидаемая ставка инфляции является постоянной, хотя, конечно, реализуемая инфляция таковой не будет.

В качестве некоторого более общего примера выделим множитель ожидаемой ставки инфляции из уровня цен и идентифицируем ее как третью переменную состояния. Снова никакого изменения в общей теории не понадобится. Ожидаемую ставку инфляции обозначим через y. Предположим существование двух альтернативных моделей поведения ставки инфляции:

модель 1 $\quad dy = k_1 y(\theta_1 - y)dt + \sigma_1 y^{3/2}dz_3;$

модель 2 $\quad dy = k_2 y(\theta_2 - y)dt + \sigma_2 y^{1/2}dz_3$

со стохастическим дифференциальным уравнением, управляющим изменениями уровня цен, в каждой из моделей

$$dp = ypdt + \sigma_p p y^{1/2} dz_2,$$

причем $\mathrm{cov}(y, p) \equiv \rho\sigma_1\sigma_p y^2 p$ в модели 1, $\mathrm{cov}(y, p) \equiv \rho\sigma_1\sigma_p y p$ в модели 2 и $\sigma_p < 1$. Здесь, как и в уравнении (4.11), для удобства записи используем $z_2(t)$ и $z_3(t)$, обозначающие линейные комбинации $w_{n+2}(t)$ и $w_{n+3}(t)$.

Модель 1 может оказаться эмпирически лучшим выбором, так как неформальные свидетельства показывают, что относительная (процентная) дисперсия ожидаемой ставки инфляции увеличивается с повышением ее уровня. Модель 1 имеет это свойство, в то время как модель 2 его не имеет. Однако решение модели 2 проще с аналитической точки зрения, поэтому следует рассмотреть обе модели для возможного практического использования. В обеих моделях ожидаемая ставка инфляции стремится к установившемуся равновесному уровню. Обе модели обнаруживают также корреляцию между изменениями ставки инфляции и уровня цен, допуская, таким образом, положительную или отрицательную силу, вынуждающую уровень цен изменяться.

Уравнение определения стоимости для реальной стоимости номинальной облигации, конкретизированное для модели 1, имеет вид

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 y^3\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \rho\sigma_1\sigma_p y^2 p\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial p} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 p^2 y\frac{\partial^2 N}{\partial p^2} +$$

$$+[k\theta - (k+\lambda)r]\frac{\partial N}{\partial r} + k_1 y(\theta_1 - y)\frac{\partial N}{\partial y} + yp\frac{\partial N}{\partial p} + \frac{\partial N}{\partial t} - rN = 0 \quad (4.26)$$

с краевым условием $N(r, y, p, T, T) = 1/p(T)$. Решением уравнения (4.26) является функция

$$N(r, y, p, t, T) = \frac{\Gamma(v-\delta)}{\Gamma(v)}\left[\frac{c(t)}{y}\right]^{\delta} M\left(\delta, v, -\frac{c(t)}{y}\right) P(r, t, T) / p(t),$$

где

$$c(t) \equiv \frac{2k_1\theta_1}{\sigma_1^2(e^{k_1\theta_1(T-t)} - 1)}; \quad (4.27)$$

$$\delta \equiv \{[(k_1 + \rho\,\sigma_1\sigma_p + \sigma_1^2/2)^2 + 2(1 - \sigma_p^2)\sigma_1^2]^{1/2} -$$

$$- (k_1 + \rho\sigma_1\sigma_p + \sigma_1^2/2)\}/\sigma_1^2;$$

$$v \equiv 2[(1 + \delta)\sigma_1^2 + k_1 + \rho\sigma_1\sigma_p]/\sigma_1^2;$$

$M(.,\,.,\,.)$ – конфлюентная гипергеометрическая функция, а $\Gamma(.)$ – гамма-функция.

Аналогичные действия с моделью 2 приводят к уравнению

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 y\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \rho\sigma_{21}\sigma_p yp\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial p} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 p^2 y\frac{\partial^2 N}{\partial p\partial p} +$$

$$+[k\theta - (k+\lambda)r]\frac{\partial N}{\partial r} + k_2 y(\theta_2 - y)\frac{\partial N}{\partial y} + yp\frac{\partial N}{\partial p} + \frac{\partial N}{\partial t} - rN = 0 \quad (4.28)$$

с краевым условием $N(r, y, p, T, T) = 1/p(T)$. Соответствующей формулой стоимости оказывается следующая:

$$N(r, y, p, t, T) = \left(\frac{2\xi e^{[(k_2+\rho\sigma_2\sigma_p+\xi)(T-t)/2}}{(\xi + k_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)(e^{\xi(T-t)} - 1) + 2\xi}\right)^{2k_2\theta_2/\sigma_2^2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{-2(e^{\xi(T-t)} - 1)(1 - \sigma_p^2)y}{(\xi + k_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)(e^{\xi(T-t)} - 1) + 2\xi}\right)P(r, t, T)\,/\,p(t),$$

где

$$\xi \equiv [(k_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)^2 + 2(1 - \sigma_p^2)\sigma_2^2]^{1/2}.$$

Временная структура процентных ставок, порождаемая уравнениями (4.27) и (4.28), может предполагать широкое разнообразие форм в зависимости от относительных значений переменных и параметров. Более сложные модели, учитывающие влияние большего числа деталей, можно построить аналогичным способом.

В данной главе были использованы различные частные случаи основного уравнения определения стоимости (4.5). Это уравнение определяет реальную стоимость актива как функции реального богатства и переменных состояния. С практической точки зрения, возможно, удобнее иметь соответствующее уравнение определения стоимости, в котором все стоимости выражаются в номинальных терминах. В нашей постановке оно задается следующим утверждением. В этом утверждении определяем номинальное богатство как $X \equiv pW$, косвенную функцию полезности в терминах номинального богатства как $V(X, Y, t) \equiv J(X/p, Y, t) \equiv J(W, Y, t)$ и номинальную стоимость актива через номинальное богатство как $H(X, Y, t) \equiv pF(X/p, Y, t) \equiv pF(W, Y, t)$. Как и до сих пор, считаем, что k-я составляющая вектора переменных состояния Y представляет уровень цен p.

Утверждение 4.1. Номинальная стоимость актива в терминах номинального богатства $H(X, Y, t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2}\mathrm{var}(X)H_{XX} + \sum_{i=1}^{k}\mathrm{cov}(X, Y_i)H_{XY_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)H_{Y_iY_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}H_{Y_i}\left[\mu_i - \left(\frac{-V_{XX}}{V_X}\right)\mathrm{cov}(X, Y_i) - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{-V_{XY_i}}{V_X}\right)\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)\right] +$$

$$+(\eta X - pC^*)H_X + H_t + p\delta - \eta H = 0, \qquad (4.29)$$

где номинальная процентная ставка η задается выражением

$$\eta = \alpha_X - \left(\frac{-V_{XY}}{V_X}\right)\left(\frac{\mathrm{var}\, X}{X}\right) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-V_{XY_i}}{V_X}\right)\left(\frac{\mathrm{cov}(X, Y_i)}{X}\right) \qquad (4.30)$$

и α_X является ожидаемой доходностью номинального богатства

$$\alpha_X = a^{*\prime}\alpha + \left(\frac{\mu_p}{p}\right) + \left(\frac{\mathrm{cov}(p,\ X)}{pX}\right) - \left(\frac{\mathrm{var}\, p}{p^2}\right).$$

Доказательство. Из правил умножения Ито следует, что

$$\mathrm{var}W = (1/p^2)\mathrm{var}(X) - (2X/p^3)\mathrm{cov}(X, p) + (X^2/p^4)\mathrm{var}p,$$

$$\mathrm{cov}(W, p) = (1/p)\mathrm{cov}(X, p) - (X/p)\mathrm{var}p,$$

$$\mathrm{cov}(W, Y) = (1/p)\mathrm{cov}(X, Y) - (X/p^2)\mathrm{cov}(Y, p)$$

и

$$\alpha_X = a^{*\prime}\alpha + \left(\frac{\mu_p}{p}\right) + \left(\frac{\mathrm{cov}(p, X)}{pX}\right) - \left(\frac{\mathrm{var}\, p}{p^2}\right).$$

При $J(W, Y, t) \equiv J(X/p, Y, t) \equiv V(X, Y, t)$ имеем

$$\frac{J_{WW}}{J_W} = p\frac{V_{XX}}{V_X}, \quad \frac{J_{WY_i}}{J_W} = p\frac{V_{XY_i}}{V_X}, \quad \frac{V_{Xp}}{V_X} = -\frac{1}{p} - \frac{X}{p}\frac{V_{XX}}{V_X}.$$

Уравнение (4.29) получится, если переписать производные функции $F(W, Y, t)$ через производные функции $H(X, Y, t)$ и использовать вышеприведенные соотношения в уравнении (4.5). Номинальная процентная ставка тогда может быть идентифицирована как номинальный поток выплат, необходимый для поддержки номинальной стоимости актива η, которая определена формулой (4.30).

Сравнение выражений (4.29) и (4.30) с (4.5) и (4.2) показывает, что уравнение процентной ставки и основное уравнение определения стоимости имеют одинаковый вид, когда все переменные выражаются в реальных терминах. Используя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения, номинальную процентную ставку можно выразить в терминах реального богатства в следующем виде:

$$\eta = r + \left(\frac{1}{p}\right)\left[\mu_p - \left(\frac{-J_{WW}}{J_W}\right)\mathrm{cov}(W,\ p) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-J_{WY_i}}{J_W}\right)\mathrm{cov}(Y_i,\ p) - \left(\frac{\mathrm{var}\, p}{p}\right)\right],$$

где r, реальная процентная ставка, задается уравнением (4.2). Величина (μ_p/p) является ожидаемой ставкой инфляции. Остальные члены могут в общем случае иметь соответствующий знак, так что номинальная процентная ставка может быть или больше, или меньше суммы реальной процентной ставки и ожидаемой ставки инфляции.

В этой главе исследована рациональная модель определения цены актива для изучения временной структуры процентных ставок, в которой текущие цены и стохастические свойства всех активов, включая облигации, получаются эндогенно. При помощи конкретных примеров получены простые явные формы решения для цен облигаций, которые зависят от наблюдаемых экономических переменных и могут проверяться. Комбинация равновесных принципов определения цен активов и соответствующее моделирование лежащих в основе стохастических процессов обеспечивают мощное средство для получения состоятельных теорий.

Следует отметить, что некоторые формы классической гипотезы ожиданий согласованы с разработанной равновесной моделью, в то время как другие формы в общем случае не согласуются. С помощью разработанной равновесной модели удается также найти соотношение между некоторыми равновесными моделями непрерывного времени и традиционными подходами, которые выражают ожидаемые будущие спот-ставки как линейные комбинации прошлых спот-ставок.

ГЛАВА

5

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР АФФИННОГО КЛАССА

§ 1. АФФИННЫЕ ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ МОДЕЛЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для анализа временных структур аффинного класса доходности имеется несколько способов построения моделей краткосрочной процентной ставки. В этой главе приводится сравнительный анализ трех из них: модели Васичека, модели CIR и модели MC, кратко описанных в § 3 гл. 1. Основное внимание уделяется исследованию взаимных свойств функций аффинной временной структуры доходности для этих моделей и свойств вероятностных распределений стохастических процессов, которым следуют краткосрочные ставки. Единство этих моделей состоит в том, что указанные процессы описываются одним и тем же стохастическим дифференциальным уравнением, предполагающим наличие нижней отражающей границы для процессов ставки, различной для разных моделей. Это приводит к тому, что условные распределения краткосрочной процентной ставки оказываются также различными: для модели CIR – это смесь гамма-распределений, для модели Васичека – нормальное распределение, а для модели MC – смесь сдвинутых гамма-распределений.

В рамках аффинного класса временной структуры цены дисконтных облигаций определяются через краткосрочную процентную ставку. Однако на практике краткосрочные ставки не наблюдаются. Следовательно, значения этих ставок не могут быть использованы для идентификации адекватной модели процесса цен облигаций. В то же время известно, что большинство рыночных активов котируется через кривые доходности. Следовательно, с практической точки зрения более естественно использовать ставки доходности до погашения вместо краткосрочных процентных ставок. Таким образом, особенно интересна проблема построения адекватной модели процесса цен облигации на основе статистического анализа выборочных данных доходности до погашения. Решение такой задачи демонстрируется для указанных выше моделей. С этой целью построены разностные версии стохастических дифференциальных уравнений, аппроксимирующие процесс доходности. Затем применяется метод максимального правдоподобия для оценки параметров разностных версий модели. Такая статистическая процедура используется для анализа выборочных данных, описывающих доходность до погашения десяти ЦБ Казначейства США за пятилетний период.

Аффинный класс доходности моделей временных структур впервые был введен Р. Брауном и С. Шейфером (Brown, Schaefer, 1991), заметившим, что некоторые модели временных структур определяются в явной аналитической форме. Они показали, что это имеет место, если дрейф и квадрат волатильности краткосрочной ставки являются линейными функциями краткосрочной ставки и не зависят явно от времени. Д. Даффи и Р. Кан (Duffie, Kan, 1993) распространили эти идеи на многомерный случай. Примерами таких однофакторных моделей являются модель О. Васичека (Vasiček, 1977), модель CIR (Cox, Ingersoll, Ross, 1985) и модель MC (Medvedev, Cox, 1996).

Обычно в литературе первые две модели рассматриваются как модели различных классов. Однако можно дать такую интерпретацию процессам краткосрочной ставки, что все три модели попадают в один класс. В основе этой интерпретации лежит тот факт, что процессы краткосрочной ставки описываются одним и тем же стохастическим дифференциальным уравнением, предполагающим наличие нижней отражающей границы для ставки. Эта граница в модели Васичека удалена на минус бесконечность, в модели CIR равна нулю, а в модели MC произвольная.

Основное внимание уделим исследованию взаимных свойств функций аффинной структуры этих моделей и вероятностных свойств стохастических процессов, которым следуют краткосрочные ставки. Заметим, что анализ будет проводиться относительно исходной, а не нейтральной к риску вероятностной меры. При этом все функции аффинной структуры, вероятностные распределения, производящие функции моментов получаются в явной аналитической форме. Изложение следует результатам, полученным Н. Илиевой (Ilieva, 2000), которая показала, что краткосрочная ставка в переходном режиме является суммой двух составляющих: случайного процесса со сдвинутым гамма-распределением и случайного процесса с составным пуассоновским распределением с экспоненциальным распределением слагаемых. При переходе к стационарному режиму вторая составляющая исчезает. Если значение параметра сдвига в первой составляющей возрастает до бесконечности, тогда краткосрочная ставка становится такой, как в модели Васичека. Если значение параметра сдвига в первой составляющей равно нулю, тогда краткосрочная ставка становится такой, как в модели CIR. В других случаях ставка является процессом, используемым в модели MC. При таких изменениях параметра сдвига для фиксированных математического ожидания и дисперсии процесса краткосрочной ставки маргинальное распределение процесса ставки изменяется от гамма-распределения для модели CIR к нормальному распределению для модели Васичека.

Когда цена бескупонной облигации с номинальной стоимостью 1 и моментом погашения T при безрисковой краткосрочной процентной ставке в момент времени $t < T$, равной r, выражается в виде

$$P(t, r, T) = \exp\{A(t, T) - rB(t, T)\}, \tag{5.1}$$

говорят, что модель временной структуры процентной ставки принадлежит к *аффинному классу доходности*. Заметим, что ставка доходности до погашения в этом случае определяется по формуле

$$y(t, r, T) = [rB(t, T) - A(t, T)]/(T - t). \tag{5.2}$$

Тот факт, что ставка доходности $y(t, r, T)$ линейно зависит от значения краткосрочной процентной ставки $r = r(t)$, и определяет название класса доходности. Различные аспекты свойств аффинных моделей рассматривались в многочисленных статьях (см., например, Brown, Schaefer, 1994). Функции $A(t, T)$ и $B(t, T)$ для краткости в дальнейшем будем называть *функциями аффинной временной структуры*. Эти функции определяются из так называемого уравнения в частных производных для временной структуры при условии отсутствия арбитража:

$$P_t + [\mu(t, r) + \lambda(t, r)\sigma(t, r)]P_r + ½\,\sigma^2(t, r)P_{rr} - rP = 0, \tag{5.3}$$

где для краткости опущены аргументы у функции $P(t, r, T)$ и частные производные по переменным t и r обозначены в виде соответствующих индексов.

Граничным условием уравнения (5.3) является равенство

$$P(T, r, T) = 1 \quad \text{для любых } r. \tag{5.4}$$

Функции $\mu(t, r)$ и $\sigma(t, r)$ в уравнении (5.3) являются дрейфом и волатильностью краткосрочной процентной ставки $r(t)$, которая следует диффузионному процессу, определяемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW(t). \tag{5.5}$$

Функция $\lambda(t, r)$ является рыночной ценой риска и задается извне так же как и функции $\mu(t, r)$ и $\sigma(t, r)$. Цена $P(t, r, T)$ также следует диффузионному случайному процессу. При отсутствии арбитража дрейф логарифма этой цены определяется выражением

$$\mu(t, r) + \lambda(t, r)\sigma(t, r).$$

Для того чтобы решение уравнения (5.3) имело вид (5.1), достаточно, чтобы функции $\mu(t, r) + \lambda(t, r)\sigma(t, r)$ и $\sigma^2(t, r)$ были аффинными, т. е. линейными относительно r. Этого можно достичь, если положить

$$\mu(t, r) = \alpha(t)r + \beta(t), \tag{5.6}$$

$$\sigma^2(t, r) = \gamma(t)r + \delta(t), \tag{5.7}$$

$$\lambda(t, r)\sigma(t, r) = \xi(t)r + \eta(t). \tag{5.8}$$

В дальнейшем для краткости $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будем называть *коэффициентами аффинной структуры*. Если в уравнение (5.3) подставить выражения (5.1), (5.6)–(5.8) и рассматривать t и r как независимые переменные с учетом граничного условия (5.4), то это уравнение распадается на два следующих уравнения для функций аффинной временной структуры:

$$\frac{dB}{dt} = \gamma(t)B^2(t, T)/2 - [\alpha(t) + \xi(t)]B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0; \tag{5.9}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\delta(t)B^2(t, T)/2 + [\beta(t) + \eta(t)]B(t,T), \quad A(T, T) = 0. \tag{5.10}$$

Фактически уравнением является только (5.9). Решив его и найдя $B(t, T)$, можно найти $A(t, T)$, проинтегрировав (5.10). Поэтому

$$A(t, T) = \int_t^T \left[-\frac{1}{2}\delta(s)B^2(s, T) + [\beta(s) + \eta(s)]B(s, T) \right] ds. \tag{5.11}$$

Уравнение (5.9) является уравнением Риккати и в общем случае не имеет явного решения. Однако в одном важном случае такое решение можно получить.

Утверждение 5.1. Если существует константа $c \neq 0$, такая, что имеет место равенство

$$c^2\gamma(t)/2 - c[\alpha(t) + \xi(t)] - 1 = 0, \tag{5.12}$$

тогда решение уравнения (5.9) имеет вид

$$B(t,\, T) = \frac{cJ(t,\, T)}{c + J(t,\, T)}, \tag{5.13}$$

где

$$J(t,\, T) = \int_t^T \exp\left\{\int_t^y \left(\frac{1}{c} + \frac{c}{2}\gamma(x)\right)dx\right\}dy. \tag{5.14}$$

Доказательство этого утверждения проще всего получить непосредственной подстановкой выражений (5.13), (5.14) в уравнение (5.9), учитывая единственность решения этого уравнения.

Заметим, что формальному условию (5.12) можно придать следующий смысл. Если функция аффинной структуры $B(t, T)$ имеет установившееся значение (т. е. стремится к некоторой константе при увеличении разности аргументов $T - t \to \infty$), то условие (5.12) имеет место, и положительная константа c, определяемая из этого условия, совпадает с установившимся значением $B(-\infty, T)$, т. е. $\lim\limits_{t \to -\infty} B(t,\, T) = c$. На самом деле для предельного значения $B(-\infty, T)$ левая часть уравнения (5.9) становится нулем, а правая часть (5.9) – условием (5.12).

Предположим, что коэффициенты аффинной структуры α, β, γ, δ, ξ и η являются постоянными величинами. Модели временной структуры в таком случае называются *однородными по времени* (Brown, Schaefer, 1994). Прежде чем переходить к аналитическому рассмотрению этого случая, прокомментируем смысл коэффициентов.

Сделаем естественное предположение о том, что может существовать стационарный режим процесса краткосрочной процентной ставки $r(t)$, т. е. со временем дисперсия процесса $r(t)$ не может увеличиваться неограниченно, а устанавливается к некоторому конечному значению. В этом случае параметр α должен быть отрицательным, а его абсолютная величина определяет скорость приближения к стационарному режиму (что эквивалентно выбору масштаба времени). При малых абсолютных значениях α процесс установления к стационарному режиму протекает медленно, а при больших – быстро. Для удобства обозначим $\alpha = -k$, $k > 0$.

Математическое ожидание процесса $r(t)$ в стационарном режиме находится из уравнения $E[\mu(t, r)] = \alpha E[r(t)] + \beta = 0$. Отсюда виден смысл параметра β. Для удобства обозначим $E[r] = \theta$, тогда будем иметь $\beta = -\alpha\theta = k\theta$. Так как по смыслу среднее значение краткосрочной ставки должно быть положительным, то $\beta > 0$. Процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$, обладающий такими свойствами, обычно называют процессом, возвращающимся к среднему, или процессом Орнштейна – Уленбека.

Параметры γ и δ вместе со значениями $r(t)$ определяют квадрат волатильности процесса краткосрочной процентной ставки, как это видно из равенства (5.7). Поэтому должно выполняться неравенство $\gamma r + \delta \geq 0$ для любых r. Переписывая неравенство в форме $r \geq -\delta/\gamma$, видим, что величина $(-\delta/\gamma)$ должна рассматриваться как нижняя граница возможных значений краткосрочной процентной ставки. Поскольку обычно значения r являются положительными, это неравенство, например, выполняется, когда параметры γ и δ неотрицательные, т. е. $\gamma \geq 0$ и $\delta \geq 0$.

Как следует из (5.8), параметры ξ и η вместе со значениями процесса $r(t)$ и волатильностью $\sigma(t, r)$ определяют рыночную цену риска. Как процентную ставку, так и волатильность естественно считать неотрицательными. Вместе с тем для того, чтобы рисковая премия была положительной, необходимо, чтобы значения $\lambda(t, r)$ были отрицательными. Поэтому параметры ξ и η не следует считать положительными, т. е. $\xi \leq 0$ и $\eta \leq 0$.

Используем утверждение 5.1 для определения функции $B(t, T)$. Когда параметры аффинной структуры постоянны, равенство (5.12) можно рассматривать как уравнение для константы c, и мы можем записать его в виде

$$\gamma c^2 - 2(\alpha + \xi)c - 2 = 0.$$

При $\gamma \geq 0$ это уравнение имеет вещественные корни. Для $\gamma > 0$ они имеют вид

$$c_+ = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha + \xi + \sqrt{(\alpha + \xi)^2 + 2\gamma}\right),\ c_- = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha + \xi - \sqrt{(\alpha + \xi)^2 + 2\gamma}\right).$$

Обозначим для краткости $\varepsilon = \sqrt{(\alpha + \xi)^2 + 2\gamma} > 0$. Тогда интеграл $J(t,\ T)$, вычисляемый по формуле (5.14), принимает для этих корней соответственно значения

$$J_{+}(t,\ T) = \frac{1}{\varepsilon}[e^{\varepsilon(T-t)} - 1], \quad J_{-}(t,\ T) = \frac{1}{\varepsilon}[1 - e^{-\varepsilon(T-t)}].$$

Подставляя в выражение (5.13) величины c_{+} и $J_{+}(t,\ T)$, получаем функцию $B(t,\ T)$ в виде

$$B(t,\ T) = \frac{2[e^{\varepsilon(T-t)} - 1]}{2\varepsilon + (\varepsilon - \alpha - \xi)[e^{\varepsilon(T-t)} - 1]}. \tag{5.15}$$

Подстановка в выражение (5.13) величин c_{-} и $J_{-}(t,\ T)$ приводит к функции, отличающейся от (5.15) только противоположным знаком. Однако отрицательная функция $B(t,\ T)$ противоречит экономическому смыслу цены (5.1), так как с увеличением процентной ставки r цена облигации в данном случае будет увеличиваться. Поэтому такая версия не может быть принята, и мы имеем единственное решение уравнения (5.9) в виде (5.15).

Как и следовало ожидать, в случае постоянных коэффициентов аффинной структуры функция $B(t,\ T)$ зависит не от значений каждой из двух своих переменных t и T, а от их разности $T - t$, т. е. является функцией одного аргумента $B(T - t)$. Обозначим $\tau = T - t$. Тогда будем иметь $\dfrac{dB(T-t)}{dt} = -\dfrac{dB(\tau)}{d\tau}$. Уравнение (5.9) в этом случае запишем так:

$$\frac{dB}{d\tau} = 1 + (\alpha + \xi)B(\tau) - \gamma B^2(\tau)/2\ ,\ \ B(0) = 0,\ \tau \geq 0.$$

Представляя это уравнение в симметричной форме, имеем

$$d\tau = \frac{dB(\tau)}{1 + (\alpha + \xi)B(\tau) - 0{,}5\gamma B^2(\tau)}, \qquad \tau \geq 0. \tag{5.16}$$

Из уравнения (5.16) следует интегральное соотношение

$$\tau = \int_0^{B(\tau)} \frac{dB}{1 + (\alpha + \xi)B - 0{,}5\gamma B^2}, \qquad \tau \geq 0, \tag{5.17}$$

которое является полезным при вычислении функции A.

Теперь обратимся к уравнению (5.10) для функции аффинной временной структуры $A(t, T)$. Правая часть уравнения (5.10) зависит от переменной t только через функцию B, поэтому функция $A(t, T)$ будет зависеть тоже только от разности своих аргументов, а не от каждой переменной в отдельности, т. е. $A(t, T) = A(T - t) = A(\tau)$. Опять используя равенство $\frac{dA(T-t)}{dt} = -\frac{dA(\tau)}{d\tau}$, можно записать уравнение (5.10) в симметричной форме:

$$d\tau = \frac{dA(\tau)}{0{,}5\delta B^2(\tau) - (\beta+\eta)B(\tau)}, \quad A(0) = 0, \ \tau \geq 0. \tag{5.18}$$

Комбинируя уравнения (5.16) и (5.18), получаем для функции $A(\tau)$ интегральное соотношение следующего вида:

$$A(\tau) = \int\limits_0^{B(\tau)} \left(\frac{0{,}5\delta B^2 - (\beta+\eta)B}{1 + (\alpha+\xi)B - 0{,}5\gamma B^2} \right) dB. \tag{5.19}$$

Преимущество соотношения (5.19) перед (5.11) состоит в том, что (5.11) является интегралом довольно сложной функции по переменной τ, в то время как (5.19) является интегралом по переменной B от простого рационального выражения. Фактически (5.19) является табличным интегралом. Введем для краткости следующие обозначения:

$$\varepsilon = \sqrt{(\alpha+\xi)^2 + 2\gamma}, \quad \vartheta_+ = \varepsilon + (\alpha+\xi),$$

$$\omega = \gamma(\beta+\eta) - \delta(\alpha+\xi), \quad \vartheta_- = \varepsilon - (\alpha+\xi).$$

Тогда интеграл (5.19) может быть представлен в виде одного из следующих эквивалентных выражений:

$$A(\tau) = \frac{\delta}{\gamma}\left[\tau - B(\tau)\right] - \frac{\omega}{\gamma^2}\left[(\alpha+\xi)\tau - \ln\left(1 + (\alpha+\xi)B(\tau) - \frac{\gamma}{2}B^2(\tau)\right)\right], \tag{5.20}$$

$$A(\tau) = \frac{\delta}{\gamma}\left[\tau - B(\tau)\right] + \frac{\omega}{\varepsilon\gamma^2}\left[\vartheta_- \ln\left(1 + \frac{\vartheta_+}{2}B(\tau)\right) + \vartheta_+ \ln\left(1 - \frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)\right], \tag{5.21}$$

$$A(\tau)=\frac{\delta}{\gamma}\left[\tau-B(\tau)\right]-\frac{\omega}{\gamma^2}\left[\vartheta_+\tau-2\ln\left(1+\frac{\vartheta_+}{2}B(\tau)\right)\right],$$

$$A(\tau)=\frac{\delta}{\gamma}\left[\tau-B(\tau)\right]+\frac{\omega}{\gamma^2}\left[\vartheta_-\tau+2\ln\left(1-\frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)\right]. \qquad (5.22)$$

Подставив в эти выражения явный вид функции $B(\tau)$ в форме (5.15), получим явные выражения функции $A(\tau)$ через срок до погашения τ.

С другой стороны, из интегрального соотношения (5.17) получаем равенство

$$\tau=\frac{1}{\varepsilon}\left[\ln\left(1+\frac{\vartheta_+}{2}B(\tau)\right)-\ln\left(1-\frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)\right],$$

используя которое, можно выразить функцию $A(\tau)$ только через функцию $B(\tau)$.

Заметим, что функции аффинной временной структуры для рассмотренного случая были получены ранее в форме (5.15) и (5.22) (см. Medvedev, Cox, 1996). В дальнейшем будем упоминать эту модель аффинной временной структуры как модель MC. Приведем также два частных случая, которые часто используются при анализе краткосрочных процентных ставок и ставок доходности.

Когда волатильность и рыночная цена риска не зависят от значений краткосрочной процентной ставки r, т. е. $\gamma = 0$ и $\xi = 0$, мы получаем модель Васичека (Vasiček, 1977). В таком случае $\varepsilon = |\alpha|$ и мы имеем

$$B(\tau)=\frac{1}{|\alpha|}[1-e^{-|\alpha|\tau}] = \frac{1}{\alpha}[e^{\alpha\tau}-1],\ \ \tau\ge 0,$$

$$A(\tau)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\delta}{2\alpha}+\beta+\eta\right)[\tau-B(\tau)]+\frac{\delta}{4\alpha}B^2(\tau),\ \ \tau\ge 0. \qquad (5.23)$$

Формулу (5.23) проще получать не из (5.20) – (5.22), так как в этом случае для вычисления пределов при $\gamma \to 0$ возникают некоторые сложности, а непосредственно из (5.19), положив $\gamma = 0$ и $\xi = 0$.

В другом частном случае предполагается, что $\delta = 0$ и $\eta = 0$. Эта версия модели временной структуры процентных ставок обычно упоминается как модель CIR (Cox, Ingersoll, Ross, 1985) и подробно описана в гл. 4. В таком случае функция $B(\tau)$ не упрощается и имеет вид (5.15), а функция $A(\tau)$ при использовании (5.21) приобретает форму

$$A(\tau)=\frac{\beta}{\varepsilon\gamma}\left[\vartheta_+\ln\left(1-\frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)+\vartheta_-\ln\left(1+\frac{\vartheta_+}{2}B(\tau)\right)\right], \qquad (5.24)$$

или при применении (5.22)

$$A(\tau)=\frac{\beta}{\gamma}\left[\vartheta_-\tau+2\ln\left(1-\frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)\right],\ \ \tau\ge 0. \qquad (5.25)$$

Заметим, что имеют место равенства, получающиеся с помощью (5.15):

$$\ln\left(1+\frac{\vartheta_+}{2}B(\tau)\right)=\varepsilon\tau-\ln\left(1+\frac{\vartheta_-}{2\varepsilon}[e^{\varepsilon\tau}-1]\right),$$

$$\ln\left(1-\frac{\vartheta_-}{2}B(\tau)\right)=-\ln\left(1+\frac{\vartheta_-}{2\varepsilon}[e^{\varepsilon\tau}-1]\right).$$

Используя эти равенства, из выражения (5.24) или (5.25) можно получить явное выражение $A(\tau)$ через τ в виде

$$A(\tau)=\frac{\beta\vartheta_-}{\gamma}\tau-\frac{2\beta}{\gamma}\ln\left(1+\frac{\vartheta_-}{2\varepsilon}[e^{\varepsilon\tau}-1]\right)=\frac{2\beta}{\gamma}\ln\left(\frac{2\varepsilon e^{\vartheta_-\tau/2}}{2\varepsilon+\vartheta_-[e^{\varepsilon\tau}-1]}\right), \qquad (5.26)$$

которое приведено в гл. 4.

Заметим, что между аналитическими выражениями функции $A(\tau)$ для моделей MC и CIR имеется следующее формальное соотношение:

$$A_{\mathrm{MC}}(\tau)=\frac{\delta}{\gamma}[\tau-B(\tau)]-\frac{\omega}{\gamma\beta}A_{\mathrm{CIR}}(\tau). \qquad (5.27)$$

Для фиксированных значений коэффициентов аффинной структуры α, β, γ, δ можно установить и другие полезные соотношения между функциями $A(\tau)$ и $B(\tau)$ различных моделей краткосрочной процентной ставки. Для этого функции снабдим индексами, устанавливающими, к какой модели относится соответствующая функция, как уже сделано в формуле (5.27). Можно доказать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 5.2. Функция $B(\tau)$, определяемая формулой (5.15), является монотонно возрастающей выпуклой вверх функцией, имеющей горизонтальную асимптоту $\lim\limits_{\tau\to\infty} B(\tau) = 2/(\varepsilon-\alpha-\xi)$. При этом для всякого $\tau \ge 0$ справедливы неравенства $0 \le B(\tau) \le -1/\alpha = B_V(\infty)$.

Доказательство. Формула (5.15) может быть записана в виде

$$B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau}-1} + \frac{\varepsilon-\alpha-\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Дважды дифференцируя эту функцию, находим, что первая ее производная является положительной, а вторая – отрицательной. Это доказывает первую часть утверждения.

Утверждение 5.3. Описание аналитических свойств функций $A(\tau)$ для различных моделей краткосрочной процентной ставки приводится в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Аналитические свойства функции $A(\tau)$

Поведение функции $A(\tau)$	Модель V	Модель CIR	Модель MC
Монотонное убывание	$-\frac{1}{2\alpha} \le \frac{\beta+\eta}{\delta}$	для любых $\alpha<0, \gamma>0, \xi\le 0$	$\frac{1}{\vartheta_-} \le \frac{\beta+\eta}{\delta}$
Выпуклость вверх	$-\frac{1}{\alpha} < \frac{\beta+\eta}{\delta}$	для любых $\alpha<0, \gamma>0, \xi\le 0$	$\frac{2}{\vartheta_-} < \frac{\beta+\eta}{\delta}$
Существование минимума	$0 \le \frac{\beta+\eta}{\delta} \le -\frac{1}{2\alpha}$	не существует	$0 \le \frac{\beta+\eta}{\delta} \le \frac{1}{\vartheta_-}$
Существование перегиба	$0 \le \frac{\beta+\eta}{\delta} \le -\frac{1}{\alpha}$	не существует	$0 \le \frac{\beta+\eta}{\delta} \le \frac{2}{\vartheta_-}$
Монотонное возрастание	$\beta+\eta<0$	не существует	$\beta+\eta<0$

Минимум функции $A(\tau)$ и ее перегиб, если они имеются, достигаются для значений переменой τ, указанных в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Точки минимума и перегиба

Точки	Модель V	Модель MC
Точка минимума	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+2\alpha\frac{\beta+\eta}{\delta}\right)$	$\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{\delta+(\beta+\eta)\vartheta_+}{\delta-(\beta+\eta)\vartheta_-}\right)$
Точка перегиба	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\frac{\beta+\eta}{\delta}\right)$	$\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{2\delta+(\beta+\eta)\vartheta_+}{2\delta-(\beta+\eta)\vartheta_-}\right)$

Утверждение 5.4. Функции $A(\tau)$, определяемые формулами (5.20)–(5.26), имеют наклонные асимптоты, задаваемые прямыми линиями $a\tau + b$. Значения параметров a и b для различных моделей краткосрочной процентной ставки приводятся в табл. 5.3

Таблица 5.3

Параметры асимптот функции $A(\tau)$

Параметры	Модель V	Модель CIR	Модель MC
a	$\frac{\beta+\eta}{\alpha}+\frac{\delta}{2\alpha^2}$	$-\frac{\beta\vartheta_+}{\gamma}$	$\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\omega\vartheta_+}{\gamma^2}$
b	$\frac{\beta+\eta}{\alpha^2}+\frac{3\delta}{4\alpha^3}$	$\frac{2\beta}{\gamma}\ln\left(\frac{2\varepsilon}{\vartheta_-}\right)$	$-\frac{2\delta}{\gamma\vartheta_-}-\frac{2\omega}{\gamma^2}\ln\left(\frac{2\varepsilon}{\vartheta_-}\right)$

Утверждения 5.2–5.4 можно доказать обычными аналитическими методами. Для этого достаточно вычислить первую и вторую производные функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ и исследовать их поведение.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ КРАТКОСРОЧНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Если функции дрейфа $\mu(t, r)$ и волатильности $\sigma(t, r)$ краткосрочной ставки $r(t)$ в уравнении (5.3) являются дифференцируемыми по второму аргументу, то плотность вероятностей $f(r, t)$ процесса $r(t)$ находится из уравнения

$$f_t(r, t) = [\sigma^2(t, r) f(r, t)]_{rr}/2 - [\mu(t, r) f(r, t)]_r, \qquad (5.28)$$

где, как и прежде, индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной.

В теории случайных процессов уравнение (5.28) называется прямым уравнением Колмогорова, а в теории диффузии – уравнением Фоккера – Планка. В случае постоянных коэффициентов аффинной структуры уравнение (5.28) принимает вид

$$f_t(r, t) = [(\gamma r + \delta)f(r, t)]_{rr}/2 - [(\alpha r + \beta)f(r, t)]_r. \qquad (5.29)$$

Введем обозначения:

$g(x|q,\ c) = \dfrac{c^{q+1}x^q}{\Gamma(q+1)}e^{-cx}$ – плотность вероятностей гамма-распределения с параметром формы q и параметром масштаба c, $x \geq 0$;

$p(j|u) = \dfrac{u^j}{j!}e^{-u}$ – распределение вероятностей Пуассона с параметром $u > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

$b(j|q,\theta) = \dfrac{\Gamma(q+j)}{j!\ \Gamma(q)}\theta^j(1-\theta)^q$ – отрицательное биномиальное распределение вероятностей с параметрами $q > 0$, $\theta \in (0,1)$, $j = 0, 1, \ldots$.

Утверждение 5.5. Если $\gamma r + \delta > 0$, т. е. $r \in (-\delta/\gamma, \infty)$, то условная плотность вероятностей $f(r,\ t|r(s) = R)$, $s < t$, являющаяся решением уравнения (5.29), имеет вид

$$f(r,\ t|r(s) = b) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{u^j}{j!}e^{-u}\,\frac{c^{q+j+1}\left(r+\delta/\gamma\right)^{q+j}}{\Gamma\left(q+j+1\right)}e^{-c(r+\ \delta/\gamma)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}p(j|u)g(r+\delta/\gamma|q+j,c), \qquad -\delta/\gamma < r < \infty, \qquad (5.30)$$

где обозначено

$$u = c(R+\delta/\gamma)e^{\alpha(t-s)}, \quad c = \frac{2\alpha}{\gamma}[e^{\alpha(t-s)}-1]^{-1}, \quad q = 2\frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{\gamma^2}-1. \quad (5.31)$$

Совместная плотность вероятностей $f(r,\ t;\ R,\ s)$, $s < t$, значений краткосрочной процентной ставки $r(t) = r$, $r(s) = R$ имеет представление для $-\delta/\gamma < r < \infty$, $-\delta/\gamma < R < \infty$:

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q+1, e^{\alpha(t-s)}) \times$$

$$\times g\left(r + \frac{\delta}{\gamma}\middle| q+j, c\right) g\left(R + \frac{\delta}{\gamma}\middle| q+j, c\right). \qquad (5.32)$$

При тех же условиях маргинальная плотность вероятностей $f(r, t)$ этой совместной плотности является плотностью сдвинутого гамма-распределения с параметром сдвига $-\delta/\gamma$, параметром формы $q + 1$ и параметром масштаба c_0, т. е.

$$f(r, t) = \frac{c_0^{q+1}(r + \delta/\gamma)^q}{\Gamma(q+1)} e^{-c_0(r+\delta/\gamma)}, \quad -\delta/\gamma < r < \infty, \qquad (5.33)$$

где $c_0 = \lim\limits_{(t-s)\to\infty} \frac{2\alpha}{\gamma}[e^{\alpha(t-s)} - 1]^{-1} = -\frac{2\alpha}{\gamma}$, $\alpha < 0$.

Доказательство. Уравнение (5.29) для $\delta = 0, \gamma > 0, \ 0 < r < \infty$ рассматривалось В. Феллером (Feller, 1951), который показал, что условная плотность вероятностей $f(r, t \mid r(s) = R)$, $s < t$, имеет вид (в интерпретации гл. 4)

$$f(r, t \mid r(s) = R) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}), \qquad (5.34)$$

где

$$c = \frac{2\alpha}{\gamma(e^{\alpha(t-s)} - 1)}, \quad u = cRe^{\alpha(t-s)}, \quad v = cr, \quad q = \frac{2\beta}{\gamma} - 1;$$

а $I_q(.)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q.

Плотность вероятностей (5.34) является плотностью нецентрального хи-квадрат распределения с $2q+2$ степенями свободы и параметром нецентральности $2u$. Заметим, что при $t - s \to \infty$ правая часть равенства (5.34) сходится к гамма-распределению с параметром формы $2\beta/\gamma$ и параметром масштаба $2|\alpha|/\gamma$.

Метод Феллера можно использовать и в более общем случае, когда $\delta \neq 0$, $\gamma r + \delta > 0$, $-\delta/\gamma < r < \infty$. Действительно, введем в уравнение (5.29) новую переменную $x = r + \delta/\gamma$ и несколько переобозначим параметры: $\widetilde{a} = \gamma/2 > 0$, $\widetilde{b} = \alpha$, $\widetilde{c} = \beta - \alpha\delta/\gamma$. Тогда условная плотность $\widetilde{u}(x,t) = f(x - \delta/\gamma, t \mid r(s) = R)$, $s < t$, будет удовлетворять уравнению

$$\widetilde{u}_t = [\widetilde{a}\, x\, \widetilde{u}\,(x, t)]_{xx} - [(\widetilde{b}\, x + \widetilde{c}\,)\,\widetilde{u}\,(x, t)]_x, \quad 0 < x < \infty,$$

которое полностью совпадает с уравнением, рассмотренным Феллером. Поэтому решением уравнения (5.29) будет то же решение Феллера, но в котором теперь переменные u, v и параметр q следует понимать по-другому:

$$u \equiv c(R + \delta/\gamma)e^{\alpha(t-s)}, \;\; v \equiv c\,(r + \delta/\gamma), \;\; q \equiv 2(\gamma\beta - \alpha\delta)/\gamma^2 - 1.$$

Дадим полученной плотности вероятностей другую интерпретацию в отличие от приведенной выше. Модифицированная функция Бесселя $I_q(x)$ может быть представлена в виде ряда

$$I_q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+q}}{j!\,\Gamma(j+q+1)}.$$

Используем это разложение в выражении (5.34) и проведем необходимые преобразования, чтобы представить каждое слагаемое разложения в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависел бы от переменной R, а другой – от переменной r. Это позволяет получить представление условной плотности вероятностей в виде (5.30) с учетом (5.31).

При увеличении $(t - s)$ зависимость между $r(t) = r$ и $r(s) = R$ исчезает, поэтому безусловную (маргинальную) плотность вероятностей (5.33) можно получить как предел

$$f(r, t) = \lim_{(t-s)\to\infty} f(r, t \mid r(s) = R) = g(r + \delta/\gamma \mid q + 1, c_0),$$

что и приводит к плотности вероятностей (5.33).

По определению совместная плотность вероятностей выражается в виде

$$f(r, t\,; R, s) = f(r, t|r(s) = R)\, f(R, s).$$

Используя в этом равенстве выражения (5.30) для $f\,(r, t|r(s) = R)$ и (5.33) для $f\,(R, s)$ и производя необходимые преобразования в выражении

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) \times g\left(r+\delta/\gamma | q+j,\, c\right) \times g(R + \delta/\gamma | q + 1,\, c_0),$$

можно получить представление (5.32).

Утверждение 5.6. Производящая функция моментов (ПФМ) условной плотности вероятностей (5.27) выражается в форме

$$M_r(\tau \mid u) = e^{-\delta\tau/\gamma} \left(\frac{c}{c-\tau}\right)^{q+1} \exp\left\{\frac{u\tau}{c-\tau}\right\}, \quad \tau < c. \tag{5.35}$$

ПФМ совместной плотности вероятностей (5.32) имеет вид

$$M_{rR}(x, y) = e^{-(x+y)\delta/\gamma} \left(\frac{1-e^{\alpha(t-s)}}{\left(1-\frac{x}{c}\right)\left(1-\frac{y}{c}\right) - e^{\alpha(t-s)}}\right)^{q+1}. \tag{5.36}$$

Эта производящая функция существует в области, определяемой неравенством $(1 - x/c)(1 - y/c) > e^{\alpha(t-s)}$.

ПФМ маргинальной плотности вероятностей (5.33) определяется выражением

$$M_r(\tau) = e^{-\delta\tau/\gamma} \left(\frac{c_0}{c_0-\tau}\right)^{q+1}, \quad \tau < c_0. \tag{5.37}$$

Параметры производящих функций определяются точно так же, как и в предыдущем утверждении.

Доказательство. Формула (5.37) является очевидной, так как это обычная формула для производящей функции сдвинутого гамма-распределения (5.33). Для доказательства формулы (5.36) достаточно вспомнить, что по свойствам гамма-распределения плотность вероятностей $g(x|q + j,\, c)$ можно рассматривать как свертку плотностей вероятностей $g(x|q,\, c)$ и $g(x|j - 1,\, c)$. Поэтому выражение (5.30) можно рассматривать как свертку плотности вероятностей $g(x|q,\, c)$ и плотности вероятностей, имеющей вид

$$e^{-u}\delta(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j}{j!}\,e^{-u}\times\frac{c(cx)^{j-1}}{\Gamma(j)}e^{-cx}. \qquad (5.38)$$

Плотность вероятностей (5.38) является плотностью вероятностей суммы случайного числа N независимых одинаково распределенных случайных величин. Причем случайное число N распределено согласно закону Пуассона с параметром u, которое в нашем случае пропорционально значению процентной ставки $r(s)$ в момент времени s. Слагаемые суммы имеют экспоненциальное распределение с параметром c. Заметим, что сумма j таких величин имеет плотность вероятностей гамма-распределения $g(x|j-1, c)$. Такое распределение известно как составное пуассоновское распределение (СПР) (о СПР см., например, Медведев, 2001). Производящая функция моментов СПР имеет вид $\exp\{u[m(\tau)-1]\}$, где u – пуассоновский параметр, а $m(\tau)$ – ПФМ слагаемых. В нашем случае $m(\tau)$ является ПФМ экспоненциального распределения с параметром c, т. е. $m(\tau)=\dfrac{c}{c-\tau}$. Таким образом, плотность вероятностей (5.30) – это плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин, одна из которых имеет плотность вероятностей $g(x|q, c)$, а другая – плотность составного пуассоновского распределения (5.38). Этот факт и выражает формула (5.35) с учетом того, что в нашем случае гамма-распределение является сдвинутым, т. е. $x = r + \delta/\gamma$.

Чтобы доказать формулу (5.36), используем двухмерную производящую функцию для плотности (5.32), полагая, что переменные x и y удовлетворяют неравенству $(1-x/c)(1-y/c) > e^{\alpha(t-s)}$, $s < t$:

$$M_{rR}(x, y) = E\{e^{rx+Ry}\} =$$

$$= e^{-(x+y)\delta/\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{c}{c-x}\frac{c}{c-y}\right)^{q+j+1}\frac{\Gamma(q+j+1)}{j!\Gamma(q+1)}[1-e^{\alpha(t-s)}]^{q+1}e^{\alpha(t-s)j}=$$

$$= e^{-(x+y)\delta/\gamma}\left(\frac{c^2[1-e^{\alpha(t-s)}]}{(c-x)(c-y)}\right)^{q+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(q+j+1)}{j!\Gamma(q+1)}\left(\frac{c^2e^{\alpha(t-s)}}{(c-x)(c-y)}\right)^{j}=$$

$$= e^{-(x+y)\delta/\gamma}\left(\frac{c^2[1-e^{\alpha(t-s)}]}{(c-x)(c-y)}\right)^{q+1}\left(1-\frac{c^2e^{\alpha(t-s)}}{(c-x)(c-y)}\right)^{-(q+1)}.$$

Полученное выражение эквивалентно выражению (5.36).

Плотность (5.33) не зависит от t, и ее ПФМ является первым сомножителем в представлении (5.32). Поскольку $\alpha < 0$, пуассоновский параметр u во втором сомножителе (5.32) будет стремиться к нулю, когда $(t - s) \to \infty$, при этом второй сомножитель в (5.32) вырождается в единицу. Таким образом, плотность (5.33) – это плотность вероятности установившегося процесса краткосрочной процентной ставки, а второй сомножитель в (5.32) характеризует переходный режим от состояния процесса в момент времени s к стационарному режиму.

Следует заметить, что один из результатов Феллера для нашего случая можно интерпретировать так: если $\widetilde{c} = \beta - \alpha\delta/\gamma > \widetilde{a} = \gamma/2$, то уровень $r = -\delta/\gamma$ нижней отражающей границы является недостижимым. Поэтому если выполняется неравенство $-\beta/\alpha > -\delta/\gamma - \gamma/2\alpha$ и краткосрочная процентная ставка в некоторый момент времени принимала значение, превышающее $-\delta/\gamma$, то ее величина всегда будет больше $-\delta/\gamma$.

Следствие 5.1. Распределение вероятностей процесса краткосрочной процентной ставки $r(t)$, определяемого уравнением (5.5) с коэффициентами (5.6) и (5.7), имеет следующие условные моменты при $r(s) = b$, $s < t$:

математическое ожидание E: $\dfrac{1+q+u}{c} - \dfrac{\delta}{\gamma}$;

дисперсия V: $\dfrac{1+q+2u}{c^2}$;

коэффициент корреляции: $e^{\alpha(t-s)}$;

коэффициент асимметрии: $\dfrac{2(1+q+3u)}{(1+q+2u)^{3/2}}$;

коэффициент эксцесса: $\dfrac{3(1+q)[1+q+2(1+2u)]+12u(2+u)}{(1+q+2u)^2}$.

Параметры u, c и q определяются выражениями (5.31).

Доказательство. Доказательство состоит в том, чтобы вычислять соответствующие производные ПФМ (5.35) в точке $\tau = 0$ для нахождения начальных моментов, а затем при необходимости пересчитывать их в центральные моменты. Для получения коэффициента корреляции используется ПФМ (5.36).

Следствие 5.2. Моменты случайной величины с маргинальной плотностью вероятностей (5.33) вычисляются по формулам: математическое ожидание θ: $-\dfrac{\beta}{\alpha}$; дисперсия D: $\dfrac{\gamma\beta-\alpha\delta}{2\alpha^2}$; коэффициент асимметрии: $\gamma\sqrt{\dfrac{2}{\gamma\beta-\alpha\delta}}$; коэффициент эксцесса: $3+\dfrac{\gamma^2}{\gamma\beta-\alpha\delta}$.

Доказательство. Доказательство производится так же, как и в следствии 5.1. Формулы для моментов в следствии 5.2 можно получить из формул следствия 5.1, если перейти к пределу $t-s\to\infty$. При этом $u\to 0$, а $c\to -2\alpha/\gamma$ ($\alpha<0$). Заметим, что естественное требование положительности дисперсии $\gamma\beta>\alpha\delta$ соответствует требованию, чтобы уровень математического ожидания был выше уровня отражающей границы: $-\beta/\alpha>-\delta/\gamma$.

Наконец, заметим, что утверждение следствия 5.2 относится к модели МС, когда все четыре коэффициента аффинной структуры в представлении дрейфа и волатильности в равенствах (5.6)–(5.7) могут отличаться от нуля. Для моделей Васичека и CIR некоторые коэффициенты обращаются в нуль и моменты плотности (5.33) для этих моделей проще. Выражения для этих моментов представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Моменты краткосрочной ставки для моделей Васичека (V) и CIR

Моменты	Модель V	Модель CIR
Математическое ожидание, θ	$-\beta/\alpha$	$-\beta/\alpha$
Дисперсия, D	$-\delta/2\alpha$	$\gamma\beta/2\alpha^2$
Коэффициент асимметрии	0	$\sqrt{2\gamma/\beta}$
Коэффициент эксцесса	3	$3+\gamma/\beta$

Утверждение 5.7. Условная плотность вероятностей краткосрочной процентной ставки (5.30) при $\gamma\to 0$ сходится к плотности нор-

мального распределения с математическим ожиданием E и дисперсией V, определяемыми следствием 5.1. При этом

$$E = R e^{\alpha(t-s)} - \frac{\beta}{\alpha}[1 - e^{\alpha(t-s)}] \text{ для любых } \gamma,$$

$$V \xrightarrow[\gamma \to 0]{} \frac{\delta}{2\alpha}[e^{2\alpha(t-s)} - 1].$$

Доказательство. ПФМ нормального распределения для E и V из следствия 5.1 имеет вид

$$M_N(\tau) = \exp\left\{\left(\frac{1+q+u}{c} - \frac{\delta}{\gamma}\right)\tau + \frac{1+q+2u}{2c^2}\tau^2\right\}.$$

Чтобы доказать утверждение 5.7, достаточно показать, что $M_N(\tau)$ и определяемая по формуле (5.35) ПФМ $M_r(\tau|u)$ при $\gamma \to 0$ имеют один и тот же предел, т. е. $\lim\limits_{\gamma \to 0} \ln[M_N(\tau)/M_r(\tau|u)] = 0$.

Приведем доказательство утверждения только для неотрицательных τ. Доказательство утверждения для неположительных τ производится аналогичным образом. Из формулы (5.35) для $0 < \tau/c < 1$ имеем

$$\ln M_r(\tau \mid u) = \frac{u\,\tau/c}{1-\tau/c} - \frac{\delta\tau}{\gamma} - (1+q)\ln\left(1 - \frac{\tau}{c}\right) =$$

$$= u\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{c}\right)^j - \frac{\delta\tau}{\gamma} + (1+q)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\tau}{c}\right)^j =$$

$$= \frac{1+q+u}{c}\tau + \frac{1+q+2u}{2c^2}\tau^2 - \frac{\delta\tau}{\gamma} + \sum_{j=3}^{\infty}\left(u + \frac{1+q}{j}\right)\left(\frac{\tau}{c}\right)^j.$$

Отсюда следует, что

$$\ln\frac{M_N(\tau)}{M_r(\tau)} = -\sum_{j=3}^{\infty}\left(u + \frac{1+q}{j}\right)\left(\frac{\tau}{c}\right)^j = -\tau^2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{u}{c^2} + \frac{1+q}{(j+2)c^2}\right)\left(\frac{\tau}{c}\right)^j.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{u}{c^2}\times\frac{\tau}{c-\tau} \le \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{u}{c^2}+\frac{1+q}{(j+2)c^2}\right)\left(\frac{\tau}{c}\right)^j \le \frac{1+q+u}{c^2}\times\frac{\tau}{c-\tau}.$$

Используя явные выражения величин u, q и c через параметры модели краткосрочной ставки по формулам (5.31), получаем следующие предельные соотношения:

$$\frac{u}{c^2}=\frac{\gamma R+\delta}{2\alpha}e^{\alpha(t-s)}[e^{\alpha(t-s)}-1] \xrightarrow[\gamma\to 0]{} \frac{\delta}{2\alpha}e^{\alpha(t-s)}[e^{\alpha(t-s)}-1],$$

$$\frac{1+q}{c^2}=\frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{2\alpha^2}[e^{\alpha(t-s)}-1]^2 \xrightarrow[\gamma\to 0]{} \frac{-\delta}{2\alpha}[e^{\alpha(t-s)}-1]^2,$$

$$\frac{\tau}{c-\tau}=\frac{\tau\gamma}{2\alpha}[e^{\alpha(t-s)}-1]\Bigg/\left(1-\frac{\tau\gamma}{2\alpha}[e^{\alpha(t-s)}-1]\right) \xrightarrow[\gamma\to 0]{} 0.$$

Применение этих неравенств и предельных соотношений в выражении для логарифма отношения ПФМ доказывает необходимый результат $\lim\limits_{\gamma\to 0}\ln[M_N(\tau)/M_r(\tau|u)]=0$, что означает сходимость условной плотности вероятностей (5.30) к нормальной плотности. В заключение заметим, что математическое ожидание E и дисперсия V имеют следующие явные выражения через параметры модели краткосрочной процентной ставки:

$$E=\frac{1+q+u}{c}-\frac{\delta}{\gamma}=Re^{\alpha(t-s)}-\frac{\beta}{\alpha}[1-e^{\alpha(t-s)}],$$

$$V=\frac{1+q+2u}{c^2}=\frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{2\alpha^2}[e^{\alpha(t-s)}-1]^2+\frac{\gamma R+\delta}{\alpha}e^{\alpha(t-s)}[e^{\alpha(t-s)}-1].$$

Таким образом, E не зависит от γ, а $V \underset{\gamma\to 0}{\to} \dfrac{\delta}{2\alpha}[e^{2\alpha(t-s)}-1]$.

Утверждение 5.8. При $\delta/\gamma\to\infty$ совместная плотность вероятностей краткосрочной процентной ставки (5.36) сходится к плотности двухмерного нормального распределения с вектором математических ожиданий $(\theta\ \theta)$ и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & D\rho \\ D\rho & D \end{pmatrix}, \ \rho = e^{\alpha\,(t-s)},$$

где θ и D определяются следствием 5.2.

Доказательство. Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, достаточно показать, что ПФМ совместной плотности вероятностей (5.36) при $\delta/\gamma \to \infty$ сходится к производящей функции моментов двухмерного нормального распределения

$$M_N(u, v) = \exp\left\{ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D\rho \\ D\rho & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \exp\{(u + v)\theta + 0{,}5D\,(u^2 + 2\rho uv + v^2)\}.$$

Обозначим для удобства $x = \delta/\gamma$. Согласно (5.36), обозначениям (5.31) и следствию 5.2, ПФМ $M_{r,R}\,(u,\ v)$ совместной плотности вероятностей может быть записана в виде

$$M_{r,R}(u, v) = e^{-(u+v)x} \left(\frac{1-\rho}{\left(1 - u\dfrac{D(1-\rho)}{\theta + x}\right)\left(1 - v\dfrac{D(1-\rho)}{\theta + x}\right) - \rho} \right)^{(\theta+x)^2/D} =$$

$$= e^{-(u+v)x} \left(1 - (u+v)\frac{D}{\theta + x} + uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta + x}\right)^2 \right)^{-(\theta+x)^2/D}.$$

В соответствии с ограничениями (5.36) на ПФМ эта функция определена на множестве переменных, удовлетворяющих неравенству

$$(u+v)\,\frac{D}{\theta + x} - uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta + x}\right)^2 < 1.$$

Нам достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \ln[M_N(u,v)/M_{r,R}(u,v)] = 0$. Для этого заметим вначале, что из представления $\ln(1-z) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k/k$

при $|z| < 1$ следует, что для $0 < z < 1$ имеют место неравенства:

$$0 > \ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+3} > -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{1-z},$$

$$0 < \ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k+3} < z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{1-z}.$$

Оценим теперь $\ln M_{r,R}(u, v)$:

$$\ln M_{r,R}(u, v) = -(u + v)\,x -$$

$$-\frac{(\theta+x)^2}{D}\ln\left(1-(u+v)\frac{D}{\theta+x}+uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^2\right) =$$

$$= -(u + v)\,x + \frac{(\theta+x)^2}{D}\left((u+v)\frac{D}{\theta+x}-uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^2\right) +$$

$$+\frac{(\theta+x)^2}{2D}\left((u+v)\frac{D}{\theta+x}-uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^2\right)^2 +$$

$$+\frac{(\theta+x)^2}{D}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^k\left(u+v-uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)\right)^k =$$

$$= (u + v)\theta + \frac{1}{2}D(u^2 + 2uv\rho + v^2) - uv(u + v)(1-\rho)\frac{D}{\theta+x} +$$

$$+\frac{1}{2}(uv)^2(1-\rho)^2 D\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^2 +$$

$$+D\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^{k-2}\left(u+v-uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)\right)^k.$$

Поэтому

$$\ln\frac{M_N(u,v)}{M_{r,R}(u,v)} = 2uv(u+v)(1-\rho)\frac{D}{\theta+x} - \frac{1}{2}(uv)^2(1-\rho)^2 D\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^2 -$$

$$-D\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2}\left(\frac{D}{\theta+x}\right)^k\left(u+v-uv(1-\rho)\left(\frac{D}{\theta+x}\right)\right)^{k+2} = O\left(\frac{D}{\theta+x}\right).$$

Отсюда и следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{M_N(u,\,v)}{M_{r,R}(u,\,v)} = 0,$$

т. е. справедливо утверждение 5.8.

Утверждение 5.9. При $\delta/\gamma \to \infty$ плотность вероятностей краткосрочной процентной ставки (5.33) сходится к плотности нормального распределения с математическим ожиданием θ и дисперсией D, определяемыми следствием 5.2.

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что производящая функция моментов плотности вероятностей краткосрочной процентной ставки (5.33) при $\delta/\gamma \to \infty$ сходится к ПФМ нормального распределения

$$M_N(\tau) = \exp\{\theta\tau + D\tau^2/2\}.$$

Производящая функция плотности вероятностей (5.33) выражается в виде (5.37). Поскольку $M_r(\tau)$ является производящей функцией сдвинутого гамма-распределения, то между математическим ожиданием θ, дисперсией D и параметрами этого распределения q, c_0, $x = \delta/\gamma$ имеют место соотношения

$$\theta = \frac{q+1}{c_0} - \frac{\delta}{\gamma},\; D = \frac{q+1}{c_0^2},\; c_0 = \frac{\theta+x}{D},\; q+1 = \frac{(\theta+x)^2}{D}.$$

ПФМ $M_r(\tau)$ может быть записана через параметры θ и D следующим образом:

$$M_r(\tau) = e^{-x\tau}\left(1 - \frac{D\tau}{\theta+x}\right)^{-\frac{(\theta+x)^2}{D}}, \quad \tau < \frac{\theta+x}{D}.$$

Рассмотрим логарифм отношения ПФМ $M_N(\tau)/M_r(\tau)$:

$$\ln\frac{M_N(\tau)}{M_r(\tau)} = \theta\tau + \frac{1}{2}D\tau^2 + x\tau + \frac{(\theta+x)^2}{D}\ln\left(1 - \frac{D\tau}{\theta+x}\right) =$$

$$= (\theta+x)\tau + \frac{D\tau^2}{2} + \frac{(\theta+x)^2}{D}\left(-\frac{D\tau}{\theta+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right)^3 - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{D\tau^3}{\theta+x}\left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right)^2 + \ldots\right).$$

Сумма ряда в скобках легко оценивается сверху и снизу. Сделаем это только для положительных τ. Для отрицательных τ это делается аналогично:

$$\frac{2}{2 - \dfrac{D\tau}{\theta+x}} < 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{D\tau}{\theta+x}\right)^2 + \ldots < \frac{1}{1 - \dfrac{D\tau}{\theta+x}}.$$

Поэтому

$$-\frac{D\tau^3}{3(\theta+x-D\tau)} < \ln\frac{M_N(\tau)}{M_r(\tau)} < -\frac{2D\tau^3}{6(\theta+x)-3D\tau}.$$

Отсюда следует, что при $x = \delta/\gamma \to \infty$ имеет место сходимость $\ln\dfrac{M_N(\tau)}{M_r(\tau)} \to 0$ или $\lim\limits_{\delta/\gamma\to\infty} M_r(\tau) = M_N(\tau)$, что и требовалось показать.

Все утверждения были доказаны для модели МС. Результаты этих утверждений устанавливают, что отражающая граница $-\delta/\gamma$ существенно влияет на вид плотности вероятностей краткосрочной ставки $r(t)$. В общем случае эта плотность вероятностей – сдвинутая гамма-плотность (5.33). Если $\delta/\gamma = 0$ (т. е. $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$), то плотность вероятностей становится обычной гамма-плотностью. В таком случае модель МС преобразуется в модель CIR. Наконец, если отражающая граница $-\delta/\gamma \to -\infty$ (т. е. $\delta > 0$, $\gamma \to 0$), а среднее значение θ и дисперсия D фиксированы, тогда плотность вероятностей краткосрочной ставки сходится к нормальной плотности, а модель МС превращается в модель Васичека.

С финансовой точки зрения модель с отрицательной отражающей границей нереалистична. Однако такая модель может оказаться более правдоподобной для некоторых реальных выборочных данных для доходности. На самом деле, если некоторая модель с отрицательной отражающей границей достаточно точно описывает реальный процесс и обеспечивает очень малую вероятность отрицательных значений процентных ставок, тогда такая модель может использоваться на практике (см. гл. 1, § 3). Окончательное решение этой проблемы может быть сделано с помощью статистического анализа.

Что касается модели МС, то следует отметить, что присущая ей отражающая граница не обязательно отрицательна. Как было указано выше, условием существования отражающей границы является неравенство $(\theta + x)^2 > D$. Значения параметра x, обеспечивающие положительность процентной ставке, лежат в интервале $(-\theta, 0)$. При $x = 0$ условие выполняется, если стандартное отклонение цены актива будет меньше среднего ее значения (что на практике обычно всегда имеет место). Поэтому существует некоторая «ниша» для применения модели МС, определяемая неравенством $\sqrt{D} - \theta < x < 0$.

§ 3. СПЕЦИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ АФФИННОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для всякой заданной временной структуры интересно выяснить, насколько хорошо ее интерпретирует та или иная модель. При аппроксимации процесса краткосрочной процентной ставки, определяемого уравнением (5.5), различными моделями, одни и те же коэффициенты аффинной структуры для разных моделей не обязательно принимают одинаковые значения. Поэтому при сравнительном анализе удобнее от принятых коэффициентов аффинной структуры перейти к параметрам, характеризующим сам процесс краткосрочной процентной ставки. Такими параметрами могут служить установившиеся значения среднего θ и дисперсии D процесса и скорость установления стационарного режима k. По физическому смыслу эти параметры являются положительными. Для описания модели МС следует ввести еще один параметр – уровень отражающей границы: $-x$, $x = \delta/\gamma$. Тогда на основании следствия 5.2 соответствие между коэффициентами аффинной структуры и параметрами процесса краткосрочной процентной ставки устанавливается по табл. 5.5.

Таблица 5.5

Соответствие между коэффициентами аффинной структуры и коэффициентами модели

Коэффициенты	Модель V	Модель CIR	Модель MC
α	$-k$	$-k$	$-k$
β	$k\theta$	$k\theta$	$k\theta$
γ	0	$2kD/\theta$	$2kD/(\theta+x)$
δ	$2kD$	0	$2kD\,x/(\theta+x)$

Таким образом, уравнение (5.5) процесса краткосрочной процентной ставки для рассматриваемых моделей в новых обозначениях приобретает вид: для модели Васичека

$$dr = k(\theta - r)\,dt + \sqrt{2kD}\,dW(t); \tag{5.39}$$

для модели CIR

$$dr = k(\theta - r)\,dt + \sqrt{2kDr/\theta}\,dW(t);$$

для модели MC

$$dr = k(\theta - r)\,dt + \sqrt{2kD\frac{r+x}{\theta+x}}\,dW(t). \tag{5.40}$$

Заметим, что приведенное выше условие $-\beta/\alpha > -\delta/\gamma - \gamma/2\alpha$ недостижимости нижней отражающей границы в новых обозначениях превращается в неравенство $(\theta + x)^2 > D$. Кроме того, нетрудно заметить, что модель MC при $x \to 0$ превращается в модель CIR, а когда $x \to \infty$, модель MC преобразуется в модель Васичека. Последнее согласуется с утверждением 5.7 о сходимости стационарного распределения вероятностей краткосрочной процентной ставки в модели MC к нормальному распределению при $\delta/\gamma \to \infty$.

Коэффициенты аффинной структуры, связанные с рыночной ценой риска, определяются соотношением (5.8). Используя (5.7) и (5.8), можно написать, что

$$\lambda(r) = \frac{\xi r + \eta}{\sigma(r)} = \frac{\xi}{\gamma}\sigma(r) + \frac{\eta\gamma - \xi\delta}{\gamma\sigma(r)}. \tag{5.41}$$

Очевидно, если волатильность краткосрочной процентной ставки $\sigma(r)$ стремится к нулю, то переходим к детерминированному рынку, поэтому рыночная цена риска $\lambda(r)$ (и премия за риск) должна стремиться к нулю. Из формулы (5.41) следует, что этот факт будет иметь место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\eta\gamma - \xi\delta = 0$, т. е. $\eta/\delta = \xi/\gamma$. И выражение для $\lambda(r)$ преобразуется к виду

$$\lambda(r) = \frac{\xi}{\gamma}\sigma(r) = \frac{\xi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{r + \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}r + 1}. \quad (5.42)$$

Для сравнения поведения функций аффинной структуры в различных моделях при анализе одной и той же реализации процесса краткосрочной процентной ставки необходимо также установить значения коэффициентов ξ и η аффинной структуры в этих моделях так, чтобы они обеспечивали, насколько это возможно, одинаковый уровень рыночной цены риска. Естественно ожидать, что рисковая премия при краткосрочной процентной ставке, равной среднему ее уровню в установившемся режиме, будет одинаковой для всех сравниваемых моделей. Кроме того, чтобы рисковая премия была положительной, необходимо выполнение условия $\lambda(r) < 0$ (см., например, CIR, 1985). Поэтому потребуем, чтобы для всех трех рассматриваемых моделей $\lambda(\theta) = -\lambda$, $\lambda > 0$. Как уже было выше сказано, модель CIR преобразуется из модели MC при $x = \delta/\gamma \to 0$, а модель MC в модель Васичека – при $x = \delta/\gamma \to \infty$ (т. е. $\gamma/\delta \to 0$).

Таким образом, из формулы (5.42) с учетом этих свойств рыночная цена риска $\lambda(r)$ и коэффициенты аффинной структуры ξ и η для рассматриваемых моделей определяются по табл. 5.6.

Таблица 5.6

Параметры цены риска

Параметры	Модель V	Модель CIR	Модель MC
$\lambda(r)$	$-\lambda$	$-\lambda\sqrt{\frac{r}{\theta}}$	$-\lambda\sqrt{\frac{r+x}{\theta+x}}$
ξ	0	$-\lambda\frac{\sqrt{2kD}}{\theta}$	$-\lambda\frac{\sqrt{2kD}}{\theta+x}$
η	$-\lambda\sqrt{2kD}$	0	$-\lambda x\frac{\sqrt{2kD}}{\theta+x}$

Таким образом, из приведенных табл. 5.5 и 5.6 можно заключить, что коэффициенты аффинной структуры α, β, γ, δ, ξ и η взаимно однозначно выражаются через параметры случайного процесса краткосрочной процентной ставки и рыночной цены риска k, θ, D, x и λ.

Утверждение 5.10. Для любого фиксированного набора положительных значений параметров k, θ, D, λ функции аффинной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ при всяких $\tau > 0$ и $0 \le x < \infty$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$A_{\mathrm{V}}(\tau) \ge A_{\mathrm{MC}}(\tau) \ge A_{\mathrm{CIR}}(\tau),$$

$$1/k \ge B_{\mathrm{V}}(\tau) \ge B_{\mathrm{MC}}(\tau) \ge B_{\mathrm{CIR}}(\tau) \ge 0.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое значение $\tau > 0$ и вычислим производные функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$, определяемых формулами (5.22) и (5.15), по параметру x. Оказывается, что для любого набора положительных значений параметров k, θ, D, λ производные являются неотрицательными. Это и доказывает утверждение, поскольку для модели CIR $x = 0$, а для модели Васичека $x = \infty$. Явные выражения производных $\partial A/\partial x$ и $\partial B/\partial x$ из-за их громоздкости здесь не приводятся.

Заметим, что в модели МС уровень отражающей границы может быть и положительным, т. е. x может принимать и отрицательные значения, но так, чтобы выполнялось неравенство $\theta + x > 0$. То есть при $0 > x > -\theta$ будут выполняться неравенства $A_{\mathrm{MC}}(\tau) < A_{\mathrm{CIR}}(\tau)$ и $B_{\mathrm{MC}}(\tau) < B_{\mathrm{CIR}}(\tau)$.

§ 4. РАЗНОСТНЫЕ ВЕРСИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДОХОДНОСТИ ДО ПОГАШЕНИЯ

На реальном финансовом рынке краткосрочная процентная ставка $r(t)$ обычно не котируется. Чаще всего на аукционах ЦБ определяются их цены $P(t, r, t + \tau)$ или ставки доходности $y(t, r, t + \tau)$. Поэтому степень адекватности той или иной модели определить непосредственно по котировкам не удается. В частности, Казначейство США выпускает три типа ЦБ: билеты (*bills*), векселя (*notes*) и облигации (*bonds*), которые продаются через аукцион на основе назначения доходности, выражаемой в процентах с точностью до второго десятичного знака. Поэтому для выявления степени адекватности той или иной модели краткосрочной процентной ставки $r(t)$ можно воспользоваться наблюдениями за ставками доходности. Из формулы (5.2) имеем

$$y[t, r(t), t + \tau] = y(t; \tau) = [r(t)\,B(\tau) - A(\tau)]/\tau.$$

Поэтому для любого фиксированного срока до погашения τ с помощью уравнения (5.40) получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение, определяющее процесс изменения ставки доходности во времени:

$$dy = k(\theta_y - y)dt + \sqrt{2kD_y \frac{y + x_y}{\theta_y + x_y}}\, dW(t), \tag{5.43}$$

где $\theta_y = [\theta B(\tau) - A(\tau)]/\tau$, $x_y = [A(\tau) + xB(\tau)]/\tau$, $D_y = DB^2(\tau)/\tau^2$.

Сравнение уравнения (5.43) с уравнением (5.40) позволяет сделать заключение, что свойства процесса ставки доходности $y(t; \tau)$ будут совпадать со свойствами краткосрочной процентной ставки $r(t)$, если заменить значения параметров θ, D и x на значения параметров θ_y, D_y и x_y. Таким образом, если краткосрочная процентная ставка $r(t)$ следует процессу (5.40), тогда ставка доходности $y(t; \tau)$ следует случайному процессу с плотностью вероятностей смещенного гамма-распределения

$$g_y(y + x_y | u, v) = \frac{v^u (y + x_y)^{u-1}}{\Gamma(u)} \exp[-v(y + x_y)], \quad -x_y \le y < \infty,$$

со смещением $(-x_y)$, параметром формы $u = (\theta_y + x_y)^2/D_y$ и параметром масштаба $v = (\theta_y + x_y)/D_y$. Среднее значение ставки доходности будет равно θ_y, а ее дисперсия – D_y. Аналогично этому можно написать условную и совместную плотности вероятностей для доходностей $y(t)$ и $y(s)$, $s < t$, на основе плотностей вероятностей для $r(t)$ и $r(s)$ в форме (5.30)–(5.32), или, что то же, в форме (5.34).

Знание модели (5.43) с практической точки зрения может помочь финансовому аналитику прогнозировать доходности облигации в будущем. Поэтому важно рассмотреть проблему идентификации модели (5.43). Однако, как уже было сказано выше, доходности облигации выясняются в результате аукционов, происходящих через определенные периоды времени. Поэтому параметры модели (5.43) могут оцениваться только на основе некоторой выборки наблюдений доходностей до погашения $y(t)$ в моменты времени, составляющие конечное множество $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Для рассмотрения этой проблемы необходимо построить версию модели (5.43) для дискретного времени.

Простейшим способом для этого является замена в модели (5.43) инфинитезимальных приращений на конечные, т. е. dt на Δt, dy на $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, dW на $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$. Тогда будем иметь

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = k\,[\theta_y - y(t)]\Delta t + \sqrt{2kD_y \frac{y(t) + x_y}{\theta_y + x_y}}\,\Delta W. \quad (5.44)$$

Если котировки происходят через интервал времени Δt, естественно предположить, что значения доходностей известны только в моменты времени t из множества $\mathbf{T} = \{t_i = i\Delta t,\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Обозначая для краткости $y(i\Delta t) = y_i$, получаем (5.44) в следующем виде:

$$y_{i+1} = (1 - k\Delta t)\, y_i + k\Delta t\theta_y + \sqrt{2\left(k\Delta t\right) D_y \frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}}\,\xi_{i+1}, \quad (5.45)$$

где $\sqrt{\Delta t}\,\xi_{i+1} = \Delta W = W(i\Delta t + \Delta t) - W(i\Delta t)$, поэтому из свойств приращений винеровского процесса следует, что $\{\xi_i\}$ – последовательность взаимно независимых стандартных нормальных случайных величин.

Заметим, что параметр k в соотношении (5.45) встречается только как сомножитель в произведении $k\Delta t$, поэтому удобно ввести вместо k параметр $h \equiv k\Delta t$. Тогда соотношение (5.45) можно записать в наиболее простом виде:

$$y_{i+1} = (1 - h)y_i + h\theta_y + z_{i+1}, \quad (5.46)$$

где $\{z_i\}$ – независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией $2hD_y \dfrac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}$. Эта разностная схема может быть использована только в случае, когда параметр $h < 1$. Однако и в этом случае она не отражает адекватно свойств процесса доходности, так как в стационарном режиме порождает последовательность доходностей с нормальным распределением.

Точную разностную версию уравнения (5.43) можно получить исходя из его решения. Согласно теории стохастических дифференциальных уравнений (см., например, B. Oksendal, 1998) решение (5.43) может быть записано в виде

$$y(t)=y(s)e^{-k(t-s)}+\theta_y[1-e^{-k(t-s)}]+$$

$$+\int_s^t \sqrt{2kD_y\frac{y(u)+x_y}{\theta_y+x_y}}\,e^{-k(t-u)}dW(u). \tag{5.47}$$

Положим в этой формуле $t = t_{i+1}$, $s = t_i$, $k(t-s) = h$, $H = 1 - e^{-h}$. Тогда соотношение (5.47) можно записать в виде

$$y_{i+1} = (1-H)y_i + H\theta_y + Z_{i+1}, \tag{5.48}$$

где $\{Z_i\}$ – последовательность взаимно независимых случайных величин.

При фиксированном значении y_i случайные величины Z_i распределены в соответствии со смещенным нецентральным хи-квадрат распределением, со смещением $(x_y + E_y)$, параметром нецентральности $2u$ и $(2q + 2)$ степенями свободы. Величины Z_i имеют нулевое математическое ожидание и условную дисперсию

$$V_y = HD_y\left(H+2(1-H)\frac{y_i+x_y}{\theta_y+x_y}\right). \tag{5.49}$$

Плотность вероятностей этого распределения определяется выражением (5.30) или (5.34), в котором параметры имеют следующие значения для $-x_y - E_y \le z < \infty$:

$$u=\frac{(y_i+x_y)(\theta_y+x_y)}{D_y}(1-H), \quad v=\frac{(z+x_y+E_y)(\theta_y+x_y)}{HD_y},$$

$$c=\frac{\theta_y+x_y}{HD_y}, \quad q=\frac{(\theta_y+x_y)^2}{D_y}-1, \quad E_y=(1-H)y_i+H\theta_y. \tag{5.50}$$

Показать это можно следующим образом. Выше было доказано, что условным распределением вероятностей краткосрочной процентной ставки $r(t)$ является смещенное нецентральное хи-квадрат распределение (5.30) (или в других обозначениях (5.34)). Стохастические уравнения (5.40) для краткосрочной процентной ставки $r(t)$ и (5.43) для доходности $y(t)$ совпадают с точностью до параметров. Поэтому с точностью до параметров должны совпадать и плотности вероятностей для этих процессов. С другой стороны, как видно из соотношения (5.48), при фиксированном y_i случайная величина Z_i отличается от y_{i+1} только на фиксированную величину E_y. Поэтому условное распределение вероятностей случайной величины Z_i будет также смещенным нецентральным хи-квадрат распределением с дополнительным смещением E_y. Выражение для условной дисперсии V_y определяется следствием 5.1, если в приведенное там выражение для V подставить значения параметров в виде (5.50).

§ 5. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ДОХОДНОСТИ ДО ПОГАШЕНИЯ

Поскольку условная плотность вероятностей $f_Z(z \mid y_i)$ случайных величин Z_{i+1} найдена и они являются взаимно независимыми, для выборки $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ можно построить функцию правдоподобия в виде

$$L(H, \theta_y, D_y, x_y \big| y_0, ..., y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_Z(y_i - E_y \big| y_{i-1}), \qquad (5.51)$$

где плотность $f_Z(z \mid y_i)$ определяется выражениями (5.30) (или (5.34)), в которых значения переменных и параметров определяются формулами (5.50).

Очевидно, что такая функция правдоподобия является довольно сложной и ее практическое применение представляет значительные вычислительные сложности. Поэтому имеет смысл рассмотреть какие-нибудь аппроксимации, которые, с одной стороны, были бы достаточно простыми, а с другой – достаточно точно отражали свойства процесса доходности $y(t)$. Простейшая аппроксимация (5.46) не может быть принята безоговорочно, так как, во-первых, это рекуррентное соотношение определяет последовательность нормальных случайных величин, в то время как точная разностная модель (5.48) порождает последовательность случайных величин со смещенным гамма-распределением; во-вторых, соотношение (5.46) «работает» только при $h < 1$. Рассмотрим некоторые другие аппроксимации.

Введем ступенчатую аппроксимацию $\tilde{y}(t)$ случайного процесса доходности $y(t)$ следующим образом. Будем считать, что значения этого процесса в формуле (5.47) задаются соотношениями

$$\widetilde{y}(t_i) = y(t_i) = y_i \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$\widetilde{y}(u) = y_i \quad \text{для } u \in (t_i, t_{i+1}), \text{ где } t_{i+1} = t_i + \Delta t. \qquad (5.52)$$

Тогда стохастическая составляющая в (5.47) приобретает вид

$$\sqrt{2kD_y \frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-k(t_{i+1}-u)} dW(u) \right),$$

а случайные величины Z_{i+1} будут по-прежнему взаимно независимыми, но теперь распределенными нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией:

$$D_y \frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}(1 - e^{-2h}) = D_y \frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y} H(2 - H).$$

Такая аппроксимация несколько улучшает простейшую, поскольку, с одной стороны, на параметр h не накладывается ограничений, а с другой – процесс $\widetilde{y}(t)$ совпадает с процессом $y(t)$ на множестве **Т**. Поскольку Z_{i+1} будет распределено нормально, то функция правдоподобия для такой аппроксимации будет существенно проще, чем функция (5.51).

Можно ввести аппроксимацию $\widetilde{y}(t)$ случайного процесса доходности $y(t)$ несколько иначе. Будем считать, что значения процесса $y(t)$ в формуле (5.47) заменяются значениями кусочно-непрерывного процесса $\tilde{y}(t)$, который задается соотношениями

$$\tilde{y}(t_i) = y(t_i) = y_i \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$\tilde{y}(u) = E_y(u) = e^{-k(u-t_i)} y_i + [1 - e^{-k(u-t_i)}]\theta_y \quad \text{для } u \in (t_i, t_{i+1}). \qquad (5.53)$$

Смысл этого состоит в том, что на интервале $t_i < u < t_{i+1}$ в качестве аппроксимации процесса $y(t)$ принимается условное математическое ожидание $E_y(u) = E[y(u)|y_i]$. Тогда стохастическая составляющая в равенстве (5.47) преобразуется к виду

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{2kD_y \frac{E_y(u) + x_y}{\theta_y + x_y}} e^{-k(t_{i+1}-u)} dW(u).$$

В этом варианте случайные величины Z_{i+1} снова становятся распределенными нормально, имеют по-прежнему нулевое математическое ожидание, а условная дисперсия вычисляется по формуле

$$D(1-e^{-h})^2 + 2D\frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}e^{-h}(1-e^{-h}). \qquad (5.54)$$

Оказывается, что выражение (5.54) в точности совпадает с выражением (5.49), если учесть, что $1 - e^{-h} = H$. Это означает, что дисперсия случайной величины Z_{i+1} при этой аппроксимации равна дисперсии стохастической составляющей выражения (5.47), т. е. дает ее точное значение, но распределение вероятностей, как и в предыдущих аппроксимациях, является нормальным.

Аппроксимации (5.52) и (5.53) заменяют исходный случайный процесс $y(t)$ скачкообразными процессами $\tilde{y}(t)$. Теперь рассмотрим аппроксимацию процесса $y(t)$ непрерывным процессом $\tilde{y}(t)$ при помощи линейной интерполяции

$$\tilde{y}(t_i) = y(t_i) = y_i \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \ldots$$

и

$$\tilde{y}(u) = \frac{t_{i+1} - u}{t_{i+1} - t_i}y_i + \frac{u - t_i}{t_{i+1} - t_i}y_{i+1} \quad \text{для } u \in (t_i, t_{i+1}). \qquad (5.55)$$

Стохастическая составляющая в равенстве (5.47) преобразуется к виду

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\frac{2kD_y}{\theta_y + x_y}\left(\frac{t_{i+1} - u}{t_{i+1} - t_i}y_i + \frac{u - t_i}{t_{i+1} - t_i}y_{i+1} + x_y\right)} e^{-k(t_{i+1}-u)}dW(u)$$

и имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$D_y\frac{y_i + x_y}{\theta_y + x_y}[1-e^{-2h}] + D_y\frac{y_{i+1} - y_i}{\theta_y + x_y}\left(1 - \frac{1-e^{-2h}}{2h}\right).$$

Таким образом, все четыре аппроксимации (5.45), (5.52), (5.53) и (5.55) приводят к функции правдоподобия для нормального распределения в отличие от точной разностной версии (5.47), которая дает функцию правдоподобия (5.51) сложной формы. Обоснованное сравнение качества предложенных аппроксимаций можно сделать, видимо, только при анализе реальных данных. Заметим лишь, что при малых значениях параметра h, когда членами порядка $O(h^2)$ можно пренебрегать по сравнению с h, аппроксимация (5.52) превращается в аппроксимацию (5.45). При больших значениях параметра x_y, как было показано в утверждении 5.7, смещенное нецентральное хи-квадрат распределение сходится к нормальному, а функция правдоподобия (5.51) – к функции правдоподобия для нормального распределения. В этом случае, видимо, предпочтительной будет аппроксимация (5.53), так как она обеспечивает совпадение дисперсии (5.54) стохастической составляющей с ее точным значением (5.49). Пусть дисперсия стохастической составляющей в рассмотренных аппроксимациях выражается в виде $\sigma(1 + \varphi y_i + \phi y_{i+1})$. Представление коэффициентов σ, φ и ϕ через параметры H, θ_y, D_y, x_y для той или иной аппроксимации легко определить, сравнивая выражение $\sigma(1 + \varphi y_i + \phi y_{i+1})$ с формулой для соответствующей дисперсии. Тогда функция правдоподобия L_a, получаемая на основе аппроксимаций, будет иметь вид

$$L_a(H,\ \theta_y,\ D_y,\ x_y \big| y_0, ..., y_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\dfrac{(y_i-(1-H)y_{i-1}-H\theta_y)^2}{\sigma(1+\varphi y_{i-1}+\phi y_i)}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma(1+\varphi y_{i-1}+\phi y_i)}}. \qquad (5.56)$$

Как обычно, при оценивании параметров нормальных распределений удобнее пользоваться не функцией (5.56), а ее логарифмом, точнее функцией

$$l_a(H, \theta_y, D_y, x_y \big| y_0, ..., y_n) = -2\ln[(2\pi)^{n/2} L_a(H, \theta_y, D_y, x_y \big| y_0,\ ..., y_n)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y_i-(1-H)y_{i-1}-H\theta_y)^2}{\sigma(1+\varphi y_{i-1}+\phi y_i)} + \ln[\sigma(1+\varphi y_{i-1}+\phi y_i)]\right). \qquad (5.57)$$

Используя функцию (5.57), вместо набора параметров H, θ_y, D_y, x_y проще оценивать набор параметров H, θ_y, σ и φ. Это эквивалентно, поскольку между такими наборами параметров имеется взаимно однозначное соответствие. Что касается параметра ϕ, то для аппроксимаций (5.45), (5.52) и (5.53) этот параметр равен нулю. Для аппроксимации (5.55) параметры φ и ϕ связаны между собой соотношением

$$\phi = \frac{2h - 1 + e^{-2h}}{1 - 2he^{-2h} - e^{-2h}} \varphi. \tag{5.58}$$

Оценками максимального правдоподобия $\widehat{H}$, $\widehat{\theta}_y$, $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\varphi}$ параметров H, θ_y, σ и φ являются такие значения этих величин, которые доставляют минимум функции l_a. Для получения этих значений введем систему вспомогательных статистик:

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i}, \qquad S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i},$$

$$S_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i}, \qquad S_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i}, \tag{5.59}$$

$$S_5 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}^2}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i}, \qquad S_6 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i y_{i-1}}{1 + \varphi y_{i-1} + \phi y_i}.$$

Дифференцируя функцию (5.57) по параметрам θ_y, H, σ и приравнивая полученные производные нулю, получаем уравнения для оценок. Сначала удобнее решить уравнение для оценки $\widehat{\theta}_y$, которая выражается через статистики (5.59) и оценку $\widehat{H}$. Затем из уравнения для оценки $\widehat{H}$ находим ее через статистики (5.59). Наконец, решается уравнение для оценки $\widehat{\sigma}$, которая определяется через статистики (5.59) и уже найденные оценки $\widehat{H}$ и $\widehat{\theta}_y$. Это приводит к тому, что оценки максимального правдоподобия параметров H, θ_y и σ выражаются через статистики (5.59) следующим образом:

$$\widehat{\theta}_y = \frac{S_1 - (1 - \widehat{H})S_2}{\widehat{H} S_3}, \qquad \widehat{H} = 1 - \frac{S_6 S_3 - S_1 S_2}{S_5 S_3 - S_2^2}, \tag{5.60}$$

$$\widehat{\sigma} = S_4 + (1 - \widehat{H})^2 S_5 + \widehat{H}^2 \widehat{\theta}_y^2 S_3 - 2(1 - \widehat{H}) S_6 -$$

$$- 2\widehat{H}\widehat{\theta}_y S_1 + 2\widehat{H}(1 - \widehat{H})\widehat{\theta}_y S_2. \tag{5.61}$$

Подставляя оценки (5.60) и (5.61) в (5.57), можно получить логарифмическую функцию правдоподобия l_a как функцию только одного параметра φ:

$$l_a\left(\varphi \middle| y_0, ..., y_n\right) = n + \sum_{i=1}^{n} \ln[\hat{\sigma}(1 + \mathrm{j}y_{i-1} + \varphi y_i)] \qquad (5.62)$$

(параметр ϕ не является независимым, а определяется по формуле (5.58) через $\hat{h} = -\ln(1 - \hat{H})$).

Минимизацию (5.62) по параметру φ можно осуществить только численно. Подстановкой численного значения оценки $\hat{\varphi}$ в выражения (5.60) и (5.61) завершается процедура оценивания параметров $H = 1 - e^{-h}$, θ_y, σ и φ. После этого остается выразить D_y и x_y через найденные оценки.

Для аппроксимации (5.45) оценки этих параметров имеют вид

$$\hat{D}_y = \frac{\hat{\sigma}(1 + \hat{\varphi}\hat{\theta}_y)}{2\hat{h}}, \qquad \hat{x}_y = \hat{\varphi}^{-1}.$$

Для аппроксимации (5.52) имеем

$$\hat{D}_y = \frac{\hat{\sigma}(1 + \hat{\varphi}\hat{\theta}_y)}{\hat{H}(2 - \hat{H})}, \quad \hat{x}_y = \hat{\varphi}^{-1}.$$

Для аппроксимации (5.53) с помощью формулы (5.54) получаем

$$\hat{D}_y = \frac{\hat{\sigma}(1 + \hat{\varphi}\hat{\theta}_y)}{\hat{H}(2 - \hat{H})}, \quad \hat{x}_y = \frac{1}{\hat{\varphi}} \frac{2(1 - \hat{H})}{2 - \hat{H}} - \hat{\theta}_y \frac{\hat{H}}{2 - \hat{H}}.$$

Наконец, для аппроксимации (5.55) оценки получаются в виде

$$\hat{D}_y = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{H}(2 - \hat{H})} + \frac{\hat{\sigma}\hat{\varphi}\hat{\theta}_y}{G}, \qquad \hat{x}_y = \frac{1}{\hat{\varphi}} \frac{G}{\hat{H}(2 - \hat{H})},$$

где использовано обозначение

$$G = \frac{\hat{H}(2 - \hat{H})}{2\hat{h}} - (\hat{H} - 1)^2.$$

Таким образом, разностные аппроксимации (5.46), (5.52) и (5.53) позволяют оценивать параметры k, θ_y, D_y и x_y модели ставки доходности (5.43). Если оценка $\hat{x}_y$ имеет тенденцию быть бесконечно большой, тогда модель (5.43) близка к модели Васичека. Если оценка $\hat{x}_y$ имеет тенденцию быть около нуля, тогда модель (5.43) близка к модели CIR. Наконец, в других случаях модель (5.43) близка к модели MC. Сравнительное качество вышеупомянутых аппроксимаций может быть проверено только анализом реальных финансовых данных. Обратим внимание только на то, что аппроксимации (5.52) и (5.53) дают одинаковые оценки D_y, а приближения (5.46) и (5.52) дают одинаковые оценки x_y. Эмпирическое исследование реальных данных показывает, что параметр $h = k\Delta t$ достаточно мал (см., например, Pearson, Sun, 1994). Следовательно, все три приближения дают, очевидно, очень близкие результаты. В качестве иллюстрации применения оценок максимального правдоподобия рассмотрим временные ряды доходности до погашения ЦБ Казначейства США.

Казначейство США выпускает три типа рыночных ЦБ: билеты, векселя и облигации для десяти сроков погашения. Оно продает эти выпуски через аукцион, который проводится на основе доходности. Казначейская кривая доходности базируется на текущих рыночных расценках предложения на наиболее активно торгующиеся ЦБ каждый деловой день. Некоторая описательная статистика этих данных приведена в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Описательная статистика данных доходности ценных бумаг

Срок погашения τ	Выборочные		Вероятность $N\{y < 0\}$	Параметры гамма-распределения	
	среднее E	дисперсия V		формы u	масштаба v
3 месяца	4,52544	1,21856	2,07E-05	16,8065	3,71377
6 месяцев	4,72787	1,27548	1,42E-05	17,5250	3,70675
1 год	4,97144	1,32746	7,99E-06	18,6185	3,74508
2 года	5,52855	1,15611	1,36E-07	26,4375	4,78201
3 года	5,84234	1,01844	3,55E-09	33,5149	5,73655
5 лет	6,33490	0,79935	6,97E-13	50,2046	7,92509
7 лет	6,61430	0,70336	1,55E-15	62,1999	9,40385
10 лет	6,82586	0,63321	0	73,5808	10,7797
20 лет	7,05334	0,37272	0	133,4771	18,9240
30 лет	7,25172	0,47322	0	111,1265	15,3242

Каждая строка табл. 5.7 содержит данные относительно ставки доходности для некоторого срока погашения – от 3 месяцев до 30 лет. В колонках приводятся следующие данные.

Срок погашения – сроки погашения ЦБ Казначейства США.

Выборочные среднее и *дисперсия* – среднее E выборочного множества и дисперсии V выборочного множества процентных ставок доходности ЦБ Казначейства США.

Вероятность $N\{y < 0\}$ – вероятность того, что нормальная случайная величина со средним E и дисперсией V, такими же, как для выборочного множества процентных ставок доходности ЦБ Казначейства США, принимает отрицательные значения.

Параметры гамма-распределения: *формы* и *масштаба* – параметр формы u и параметр масштаба v гамма-распределения процентных ставок доходности, для которых среднее и дисперсия равны соответственно среднему E и дисперсии V выборочного множества процентных ставок доходности. Известно, что эти параметры могут быть рассчитаны по формулам $u = E^2/V$, $v = E/V$.

Данные табл. 5.7 показывают, что нормальное распределение может использоваться как одно из возможных распределений для описания процессов ставок доходности ЦБ Казначейства США, поскольку вероятность того, что процесс ставок доходности со средним и дисперсией как для выборочного множества процентных ставок доходности принимает отрицательные значения, очень незначительна. Это означает, что приближения (5.46), (5.52) и (5.53) могут быть приняты как основа для оценивания неизвестных параметров.

Обратим внимание также, что для параметров табл. 5.7 различие между нормальным и гамма-распределением минимально. Это показано на рис. 5.1. Следовательно, можно использовать плотность вероятности (5.33) или (5.34) для оценки параметров модели (5.43). Такие оценки представлены в табл. 5.8 и были определены с помощью аппроксимации (5.53). Поскольку облигации Казначейства США срока погашения 20 лет были введены только начиная с 1 октября 1993 г., данные табл. 5.8 были рассчитаны для периода с 1 октября 1993 г. до 1 октября 1996 г. (749 деловых дней).

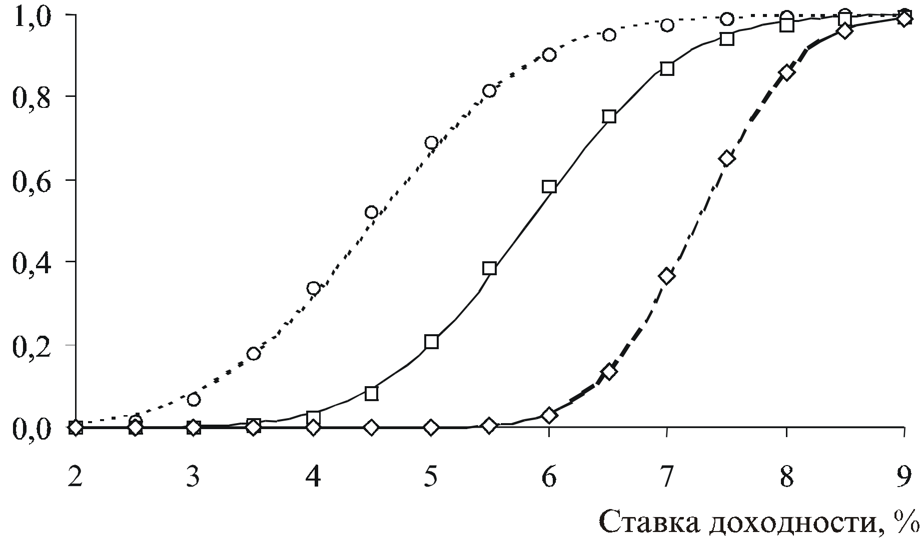

Рис. 5.1. Функции нормального и гамма-распределений для параметров табл. 5.7 для трех сроков погашения (3 месяца, 3 года, 30 лет):

нормальное распределение:

- ······ – срок 3 месяца
- ——— – срок 3 года
- –·–·– – срок 30 лет

гамма-распределение:

- ○ – срок 3 месяца
- □ – срок 3 года
- ◇ – срок 30 лет

Таблица 5.8

Оценки параметров модели доходности

Срок погашения	Оценки параметров для аппроксимации (5.53)			
τ	h	θ_y	D_y	x_y
3 месяца	0,00435	5,55030	0,29491	5,34640
6 месяцев	0,00415	5,87167	0,36308	– 0,79089
1 год	0,00397	6,20684	0,55407	– 1,90348
2 года	0,00544	6,37765	0,48684	– 1,99767
3 года	0,00599	6,50306	0,43581	– 0,57425
5 лет	0,00658	6,66402	0,39689	– 0,35864
7 лет	0,00712	6,79074	0,35468	– 0,15846
10 лет	0,00664	6,90336	0,33176	1,61374
20 лет	0,00626	7,23973	0,29338	– 1,99948
30 лет	0,00619	7,13994	0,26368	– 1,61992

Таким образом, данные табл. 5.8 позволяют определять параметры функции плотности сдвинутого гамма-распределения для выборочного множества процентных ставок доходности ЦБ Казначейства

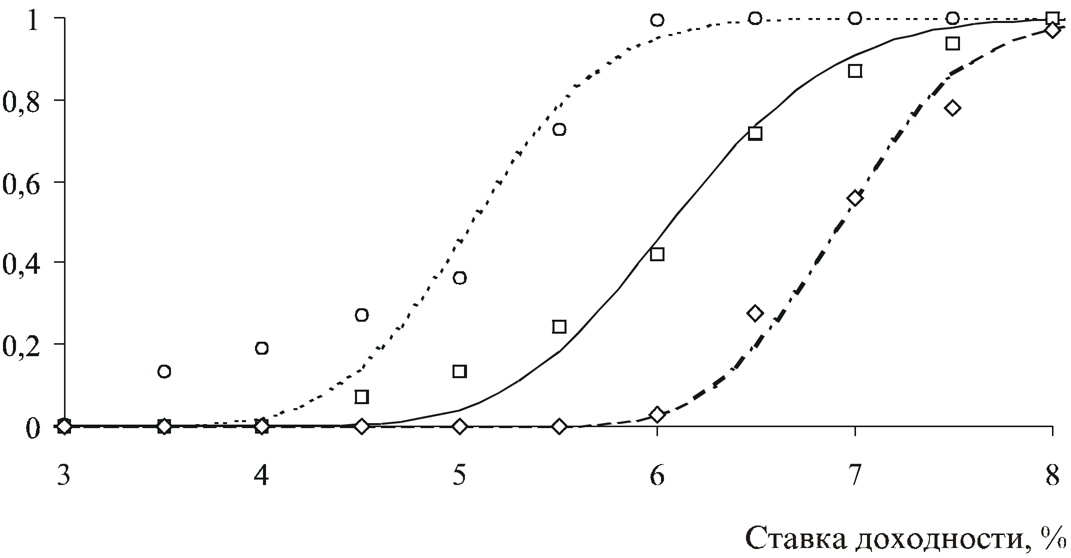

Рис. 5.2. Сдвинутые функции гамма-распределения для трех сроков погашения (3 месяца, 3 года, и 30 лет), которые были рассчитаны согласно формуле (5.33) и данным таблицы 5.8 для периода с 1 октября 1993 г. до 1 октября 1996 г. Для этих случаев представлены также значения эмпирических распределений временных рядов данных:

гамма-распределение:

······ – срок 3 месяца

——— – срок 3 года

–·–·· – срок 30 лет

эмпирическое распределение:

○ – срок 3 месяца

□ – срок 3 года

◇ – срок 30 лет

США: параметр сдвига ($-x_y$), параметр формы $u = (\theta_y + x_y)^2/D_y$ и параметр масштаба $v = (\theta_y + x_y)/D_y$. Рис. 5.2 для примера представляет три графика сдвинутых функций гамма-распределения для трех сроков погашения: 3 месяца, 3 года и 30 лет. На этом рисунке также представлены эмпирические функции распределения для этих сроков погашения.

Таким образом, свойства процессов краткосрочной процентной ставки позволяют получать функцию плотности вероятности сдвинутого гамма-распределения для процесса ставки доходности, который может наблюдаться в реальном мире только в некоторые дискретные моменты времени. Описанные разностные версии процесса ставки доходности позволяют строить соответствующие аппроксимации модели, существенно упрощающие процедуру метода максимального правдоподобия. Такой подход использован для числового анализа данных аукциона ЦБ Казначейства США. Модель процесса ставки доходности (5.43) приспособлена к данным десяти ЦБ Казначейства США для оценки параметров этой модели. Оказалось, что оценки границ отражения x_y конечны и не равны нулю. Это означает, что наиболее вероятной моделью является модель МС.

Из рис. 5.2 видно, что аппроксимация сдвинутыми гамма-распределениями не очень хороша для левых хвостов распределений. Для объяснения этого факта можно предположить, что однофакторные модели процентных ставок с постоянными коэффициентами недостаточно гибки, чтобы быть довольно хорошими приближениями процессов процентных ставок. Поэтому, вероятно, необходимо развивать исследования далее в том направлении, чтобы рассмотреть многофакторные модели и модели с переменными факторами. Анализ этих моделей, конечно, будет более сложным.

В заключение заметим, что текущая краткосрочная процентная ставка линейно связана с текущей ставкой доходности в аффинных моделях (см., например (5.2)). Поэтому после того как выполнена оценка параметров модели процесса процентной ставки доходности (5.43), можно попробовать оценить параметры модели процесса краткосрочной процентной ставки (5.5). Как следует из (5.43), для каждого данного срока погашения τ параметры этих моделей связаны отношениями

$$\theta_y = [\theta B(\tau) - A(\tau)]/\tau,\ \ x_y = [A(\tau) + xB(\tau)]/\tau,\ D_y = DB^2(\tau)/\tau^2.$$

В этих соотношениях функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются через параметры модели краткосрочной процентной ставки θ, D, x и параметра рыночной цены риска λ (см. формулы (5.15), (5.20) и табл. 5.5 и 5.6). Параметр $h = k\Delta t$ в этих моделях одинаковый. Однако при определении других параметров имеется следующая трудность: параметры θ_y, D_y и x_y модели ставки доходности определяются через четыре параметра модели краткосрочной ставки θ, D, x и λ. Таким образом, знания трех параметров θ_y, D_y и x_y недостаточно, чтобы определить четыре параметра θ, D, x и λ.

ГЛАВА
6

МНОГОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДОХОДНОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

§ 1. ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим простую многофакторную модель временной структуры процентных ставок. В качестве факторов модели примем доходности $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ бескупонных облигаций n различных фиксированных сроков погашения $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$. Например, одним из факторов можно считать текущую пятилетнюю (бескупонную) доходность. Факторы доходности образуют марковский процесс, описываемый ниже, который может считаться многомерной версией однофакторной модели CIR (см. гл. 4). В противоположность большинству многофакторных моделей временных структур факторы (марковские переменные состояния) наблюдаются через текущие кривые доходности, но их приращения могут иметь произвольно определенную корреляционную матрицу. Модель включает стохастические факторы волатильности, которые определяются линейными комбинациями факторов доходности. Цены дисконтных облигаций для любого срока погашения задаются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати, и зависимые от траектории цены производных могут быть найдены наряду с другими методами как неявные конечно-разностные решения «обычных» уравнений в частных производных (УЧП) методом переменных направлений. Ниже будут приведены примеры решения этих уравнений Риккати и УЧП.

Модель доходности является аффинной в том смысле, что для каждого срока погашения имеется функция Y_τ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ такая, что для любого момента времени t доходность всякой бескупонной облигации со сроком погашения τ равна $Y_\tau(X_t)$. Действительно, за исключением вырожденных случаев, по существу, любые n доходностей служили бы факторами, и при искажении какой-либо модели было бы эмпирической проблемой, какие n доходностей будут служить наилучшим образом. Более того, ввиду линейности марковские переменные состояния могут приниматься в качестве форвардных ставок при заданном сроке погашения, так что модель может рассматриваться как многофакторная марковская параметризация модели HJM (1992).

Частными случаями рассматриваемой модели являются модели Л. Чена (Chen, 1993), Р. Чена и Л. Скотта (Chen, Scott, 1992), CIR (1985) (в ее многомерной постановке), С. Хестона (Heston, 1991), Эль Каруи и Дж. Рочета (El Karoui, Rochet, 1989), Ф. Джамшидиана (Jamshidian, 1989), Т. Лангетига (Langetieg, 1980), Ф. Лонгстафа и Е. Шварца (Longstaff, Schwartz, 1992), Г. Пеначчи (Pennachi, 1991). Во всех из них и в других, более ранних моделях процессы переменных состояния рассматривались как «возмущения» различного рода, которые не обязательно могут наблюдаться из кривой доходности. Однако после нахождения моделей временной структуры можно увидеть, что доходность для любого срока погашения τ является τ-зависимой аффинной функцией лежащих в основе переменных состояния. При заданном наборе сроков погашения в количестве, равном числу лежащих в основе факторов (т. е. когда векторы коэффициентов, определяющие соответствующие аффинные формы, линейно независимы), обычно можно изменять базис, при котором переменные состояния являются доходностями при этих различных фиксированных сроках погашения, как в рассматриваемой модели. Так делали N. Pearson, T. Sun (1994) и R. Chen, L. Scott (1992), которые исследовали частный случай, основанный на многомерной модели CIR (1985), путем исполнения только такого изменения переменных. Описываемая модель унифицирует и обобщает такие аффинные модели в максимально возможной степени и в полной мере использует идею применения доходностей как переменных состояния.

Эмпирическое изучение многофакторных моделей в рассматриваемой постановке «аффинной доходности» включает другие известные постановки. В таких параметрических частных случаях, зависящих от спецификации модели и условий регулярности, можно вообще идентифицировать параметры μ, σ и R в степени, в которой они влияют на цены облигаций, из наблюдений поперечного сечения (*cross-sectional*) кривой доходности. Например, в однофакторной модели CIR, для которой $r_t = X_t$ эволюционирует согласно стохастическому дифференциальному уравнению $dX_t = k(\theta - X_t)dt + \gamma\sqrt{X_t}\,dW_t$, можно идентифицировать X_t, k, θ и γ, по существу, из цен любых четырех дисконтируемых облигаций в момент t, предполагая точное определение без ошибок измерения. При условии неверной спецификации модели эта идентификация не реализуема на практике. Для того чтобы оценить поведение процесса состояний X при исходной вероятностной мере P, следует обратиться к наблюдениям временных рядов с тем, чтобы охватить подразумеваемые ограничения на дрейф процесса ν. Хотя одной из наших целей является классификация семейства моделей, которые удобны для эмпирической работы, здесь мы непосредственно не касаемся проблем оценивания. Такие проблемы решаются эмпирическими исследованиями (см. гл. 5, § 5). Ограничим наше внимание поведением при одной частной эквивалентной мартингальной мере Q. (В некоторых случаях может быть множество таких мер, например, в случае скачкообразной диффузии, рассмотренной в § 4 данной главы.)

Для всех многофакторных моделей, кроме моделей некоторых типов ФП, решение оказывается качественным в вычислительном отношении. Для этих целей ниже будет представлен практичный конечно-разностный алгоритм.

Короче говоря, будет рассматриваться модель, определяющая простые соотношения между доходностями и позволяющая определять временную структуру цен ФП, которая легко поддается вычислениям и согласуется с отсутствием арбитража. В то же время мы не описываем экономику, общее равновесие которой подразумевает поведение временной структуры, возникающей в рассматриваемой модели, что легко сделать по методу CIR (1985) (см. гл. 3) или Хестона (Heston, 1991). Это добавит лишь немного к предлагаемому.

В модели Хита – Джарроу – Мортона (HJM, Heath, Jarrow, Morton, 1992) переменной состояния, по существу, является вся текущая кривая доходности. Поэтому любая исходная кривая доходности при условиях регулярности согласуется с моделью HJM. В постановке конечномерного пространства состояний наша модель имеет тот недостаток, что не всякая исходная кривая доходности согласуется с заданной параметризацией модели. На практике это часто устраняется путем «калибровки», означающей добавление временной зависимости к коэффициентам модели так, чтобы согласовать с заданной исходной кривой доходности. Такая процедура имеет очевидные недостатки. Недостаток постановки конечномерного пространства состояний, в свою очередь, может быть одним из достоинств, например, в вычислительном плане. В любом случае рассматриваемый подход использования доходностей как аффинных факторов был выполнен в рамках HJM постановки El Karoui, V. Lacoste (1992), взявших частный гауссов случай (с постоянной волатильностью). Их работа была обобщена на случай стохастической волатильности A. Frachot, D. Janci, V. Lacoste (1992).

Общие факторные модели временной структуры

Для формирования параметрической модели начнем с общей идеи факторной модели для кривой доходности. При заданном полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и пополняемой фильтрации $\{F_t : t \geq 0\}$, порождаемой стандартным броуновским движением W^* в $\mathbf{R}^n$, предположим, что имеется однородный во времени марковский процесс X, принимающий значения в некотором открытом подмножестве D из $\mathbf{R}^n$, такой, что для любых моментов времени t и τ рыночная стоимость $p_{t,\tau}$ в момент t бескупонной облигации, погашаемой в момент $t + \tau$, дается в виде $f(X_t, \tau)$, где $f \in C^{2,1}(D \times [0, \infty))$. Процесс краткосрочной ставки r предполагается определять через непрерывность с использованием измеримой функции R: $D \to \mathbf{R}$, определяемой как предел доходности, когда срок погашения стремится к нулю, или

$$R(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{-\ln f(x,\tau)}{\tau}, \quad x \in D. \tag{6.1}$$

Как следует из материалов глав 3 и 4 (ч. 1), нужна только техническая регулярность для эквивалентности между отсутствием арбитража и существованием эквивалентной мартингальной меры, т. е. вероятностной меры Q, эквивалентной P, при которой процесс цены любой ЦБ является Q-мартингалом после нормировки в каждый момент времени t значением $\exp\left(\int_0^t R(X_s)ds\right)$ непрерывного реинвестирования процентов от одной денежной единицы на счете, начиная от времени 0 при краткосрочной ставке.

Пусть X удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = \nu(X_t)dt + \sigma(X_t)\, dW_t^*, \tag{6.2}$$

где ν: $D \to \mathbf{R}^n$ и σ: $D \to \mathbf{R}^{n\times n}$ достаточно регулярные, чтобы уравнение (6.2) имело единственное (строго) решение. Дополнительные требования регулярности подразумевают, что существует стандартное броуновское движение W в $\mathbf{R}^n$ при Q такое, что

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t^*, \tag{6.3}$$

где $\mu: D \to \mathbf{R}^n$ – это функция, которую можно вычислить через v, σ и f.

Общие равновесные модели такого вида для описания активов, цены которых определяются, даны в статьях CIR (1985) и C. Huang (1987). Модели в этих статьях являются фактически моделями в постановке с ограниченным горизонтом и зависимыми от времени коэффициентами, но могут быть распространены на однородные во времени модели в постановке с неограниченным горизонтом. Описываемый подход можно было бы распространить на случай зависимых от времени коэффициентов просто путем изменения обозначений и незначительного изменения условий регулярности. Такая временная зависимость путем «стандартизации» является стандартной процедурой при традиционном конструировании моделей временной структуры (см., например, T. Ho, S. Lee (1986) или F. Black, E. Derman, W. Toy (1990)).

Здесь нас интересует выбор f, μ, σ, которые взаимно *согласованы* в том смысле, что *почти всюду* имеет место

$$f(X_t, T - t) = E\left[\exp\left(-\int_t^T R(X_s)ds\right)\middle| X_t\right],\ 0 \le t \le T < \infty, \tag{6.4}$$

где E обозначает математическое ожидание по Q.

Выражение (6.4) – это практически определение Q как эквивалентной мартингальной меры, применяемой к бескупонным (дисконтным) облигациям.

Конечно, относительно просто сконструировать согласованные функции f, μ, σ. Например, пусть μ, σ и R определяются произвольно, так что уравнение (6.3) и правая часть (6.4) являются вполне определенными, и затем пусть f определяется (6.4). Такой подход является обычным в моделях временной структуры, основанных на арбитражных соображениях, как в моделях M. Dothan (1978), O. Vasiček (1977), S. Richard (1978), F. Black, E. Derman, W. Toy (1990), J. Hull, A. White (1990), в которых X – краткосрочная ставка, идентичная R. Для многомерных моделей мы имеем примеры, в которых X является гауссово-марковским (постоянное σ, аффинное μ) и R – линейно-квадратичной формой. Под «аффинной» μ понимаем, как обычно, что имеются постоянная матрица a и вектор b такие, что $\mu(x) = ax + b$. G. Constantinides (1992) дает общую равновесную (с репрезентативными агентами) параметрическую модель, которая порождает такого сорта линейно-квадратично-гауссово поведение краткосрочной ставки. Имеются также аналогичные общие равновесные модели, такие как CIR (1985), S. Heston (1991), F. Longstaff, E. Schwartz (1992) и другие, допускающие выражение, подобное (6.4), в котором можно написать $R(x) = \sum_i x_i$, где составляющие процессы $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ – скалярные процессы, удовлетворяющие CIR-уравнению

$$dX_t^{(i)} = (a_i + b_i X_t^{(i)})dt + c_i\sqrt{d_i + X_t^{(i)}}\, dW_t^i, \quad X_0^{(i)} > 0,$$

со скалярными коэффициентами a_i, b_i, c_i и d_i. Упомянутые модели являются частным случаем модели, представленной в этой главе.

Если какая-либо величина, претендующая на роль процесса краткосрочной ставки r, удовлетворяет умеренным условиям регулярности, легко обосновывать r в общей равновесной модели, основанной на репрезентативном агенте с полезностью HARA (*hyperbolic absolute risk aversion*, гиперболическое абсолютное неприятие риска) и процессом потребления, сконструированным через r. Достаточно равновесные модели дают полезные теоретические соотношения между временной структурой, предпочтениями инвесторов, технологией и такими макропеременными, как потребление, и могут добавить еще многое к практическим повседневным задачам определения цен и управления риском для инструментов с фиксированным доходом. Для наших целей мы последуем выводу других моделей, упомянутых ранее, начиная непосредственно с некоторой совместимой модели (f, μ, σ). Мы, в частности, будем интересоваться классом моделей, которые, вероятно, легко поддаются обработке численно и эмпирически и, наконец, в которых вектор состояний X_t может рассматриваться как наблюдение самой временной структуры такой, какая подразумевалась в первой модели этого типа, предложенной M. Brennan, E. Schwartz (1979), в которой предполагаемыми факторами являются краткосрочная ставка и доходность бессрочной облигации (консоли). Доходность на консоль – это обратная величина по отношению к ее цене. Если вычисляется цена консоли в модели Бреннана – Шварца, то нет никаких причин ожидать, что результат будет обратным по отношению к их переменной состояния l, которая называется «ставкой консоли» Бреннана – Шварца.

Аффинные факторные модели

Рассмотрим класс совместимых моделей (f, μ, σ) с

$$f(x, \tau) = \exp[A(\tau) + B(\tau)\, x], \tag{6.5}$$

для которой в силу принятого предположения, что $f \in C^{2,1}(D\times[0, \infty))$, мы знаем, что A и B – C^1 функции на $[0, \infty)$. Этот параметрический класс моделей, который назовем *экспоненциально-аффинным* из-за аффинного соотношения между доходностями и факторами, является относительно просто анализируемым и имеет некоторые эмпирические преимущества. В рассматриваемой модели будем использовать тот факт, что если для всех x в некотором непустом открытом евклидовом множестве имеются аффинные соотношения типа $\alpha + \beta x = 0$, тогда $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Назовем это «принципом согласования».

Так как $f(x, 0) = 1$ для всех x из D, которое является открытым множеством, (6.5) и принцип согласования подразумевают выполнение граничных условий:

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0.$$

Поскольку R полностью определяется посредством (6.1), то R является аффинной функцией на D.

Рассмотрим для фиксированной даты погашения T процесс цены бескупонной облигации $p_t = F(X_t, t) \equiv f\,(X_t, T - t)$, $t \le T$. По лемме Ито

$$dp_t = \boldsymbol{D}F_t(X_t, t)dt + F_x(X_t, t)\sigma(X_t)dW_t, \tag{6.6}$$

где

$$\boldsymbol{D}F(x, t) = F_t(x, t) + F_x(x, t)\mu(x) + \mathrm{tr}[F_{xx}(x, t)\sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}}]/2.$$

С помощью (6.5) можно вывести, что

$$\boldsymbol{D}F(x, t) = F(x, t)[- A'(T - t) - B'(T - t)\, x + B(T - t)\, \mu(x) +$$

$$+ 0{,}5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i(T-t)B_j(T-t)\sigma_i(x)\sigma_j(x)^{\mathrm{T}}]. \tag{6.7}$$

Из представления (6.4) следует, что $\boldsymbol{D}F(X_t, t) - R(X_t)F(X_t, t) = 0$. Так как F является строго положительной, из равенства (6.7) имеем

$$0 = -R(x) - A'(\tau) - B'(\tau)\, x + B(\tau)\, \mu(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i(\tau) B_j(\tau) \sigma_i(x) \sigma_j(x)^{\mathrm{T}} / 2, \quad (x, \tau) \in D \times [0, \infty). \qquad (6.8)$$

Это уравнение применимо для всех $\tau < \infty$, так как T является произвольным.

При слабых условиях невырожденности из равенства (6.8) следует, что функции μ и $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ на D являются аффинными. Чтобы показать это, перепишем равенство (6.8) следующим образом:

$$a(x, \tau) = \sum_{i=1}^{n} B_i(\tau) \mu_i(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i(\tau) B_j(\tau) \gamma_{ij}(x), \qquad (6.9)$$

где $a(x, \tau) = R(x) + A'(\tau) + B'(\tau)x$; $\gamma_{ij}(x) = \sigma_i(x)\sigma_j(x)^{\mathrm{T}}$; $(x, \tau) \in D \times [0, \infty)$.

Известно, что R является аффинным, поэтому для каждого фиксированного τ функция $a(x, \tau)$ – аффинная. Пусть H будет функцией на подмножестве D из $\mathbf{R}^N$ при $N = 2n + (n^2 - n)/2$, определяемой равенством

$$H(x) = [\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x), \gamma_{11}(x), \gamma_{12}(x), \ldots, \gamma_{nn}(x)]^{\mathrm{T}},$$

где аргументы включают только «верхний треугольник» $\gamma_{ij}(x)$ с $i \le j$. Мы хотим показать, что каждый элемент H является аффинным по x.

Мы можем рассматривать (6.9) как систему уравнений относительно τ и x вида

$$a(x, \tau) = c(\tau)^{\mathrm{T}} H(x), \quad (x, \tau) \in D \times [0, \infty), \qquad (6.10)$$

где c: $[0, \infty) \to \mathbf{R}^N$. Например, $c_1(\tau) = B_1(\tau)$ (элемент $H_1(x) = \mu_1(x)$), в то время как $c_{n+1}(\tau) = B_1(\tau)^2/2$ (коэффициент при $\gamma_{11}(x)$). Мы можем написать уравнение (6.10) для любого из N сроков погашения $m_1, \ldots, m_N$ и получим

$$C(m_1, \ldots, m_N) H(x) = [a(x, m_1) a(x, m_2) \ldots a(x, m_N)]^{\mathrm{T}}, \quad x \in D, \qquad (6.11)$$

где $C(m_1, \ldots, m_N)$ – $N \times N$ матрица, чья i-я строка есть $c(m_i)^{\mathrm{T}}$. Если $C(m_1, \ldots, m_N)$ можно выбрать невырожденной, тогда H должно быть аффинной, как сформулировано и доказано в следующем утверждении, которое обобщает одномерный результат R. Brown, S. Schaefer (1993). Конечно, для произвольных различных ненулевых моментов времени $m_1, \ldots, m_N$ матрица $C(m_1, \ldots, m_N)$ невырожденная, за исключением $(B(m_1), \ldots, B(m_N))$, в замкнутом подмножестве меры нуль из $\mathbf{R}^{Nn}$, которое означает, что аффинная характеризация, данная ниже для $(\mu, \sigma\sigma^{\mathrm{T}})$, является как достаточной, так и вообще необходимой для аффинного соотношения доходности (6.5).

Теперь предположим, что $\mu(x)$, $\sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}}$ действительно аффинные по x. Для любых фиксированных i мы можем собрать в (6.8) все члены, содержащие x_i, в выражение вида $[-B_i'(\tau) + Q_i(B(\tau))]x_i$, где $Q_i(B(\tau))$ имеет вид $a + \sum_j b_j B_j(\tau) + \sum_{jk} d_{jk} B_j(\tau) B_k(\tau)$ для фиксированных коэффициентов a, b_j и d_{jk}. То есть Q_i является линейно-квадратичной формой. Так как уравнение (6.8) имеет место для x из открытого множества, мы должны иметь $[-B_i'(\tau) + Q_i(B(\tau))] = 0$ по принципу согласования. Это справедливо для всех i и τ, что дает нам дифференциальное уравнение

$$B'(\tau) = Q(B(\tau)), \quad B(0) = 0, \tag{6.11}$$

где $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – линейно-квадратичная форма.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (6.11) иногда называется уравнением Риккати.

Далее слагаемое в уравнении (6.8), не содержащее x, имеет вид $-A'(\tau) + \widetilde{Q}(B(\tau))$, где отображение $\widetilde{Q}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ также является линейно-квадратичной формой. Снова это слагаемое должно быть также равно нулю из принципа согласованности, для того чтобы удовлетворялось уравнение (6.8). Это приводит к уравнению

$$A'(\tau) = \widetilde{Q}(B(\tau)), \quad A(0) = 0, \tag{6.12}$$

относительно A с единственным решением

$$A(\tau) = \int_0^\tau \widetilde{Q}(B(s))ds,$$

где B – решение уравнения (6.11).

Проблема существования конечных решений уравнений Риккати является нетривиальной, так как коэффициенты не липшициевы. Решения существуют во всей временной области для частных случаев, таких как в гл. 4, а в других частных случаях они существуют до некоторого времени $\widetilde{T} > 0$, так как коэффициенты уравнения (6.11) локально липшициевы. В следующем утверждении мы неявно предполагаем, что $\widetilde{T} = +\infty$, но результаты применяем в более общих случаях, ограничивая $\tilde{T}$.

Утверждение 6.1. Предположим, что тройка (f, μ, σ) является факторной моделью с согласованной временной структурой, и имеется конечное решение обыкновенного дифференциального уравнения (6.11). Если μ, $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ и R – аффинные, тогда f – экспоненциально-аффинная. Обратно, если f – экспоненциально-аффинная и существуют даты погашения $m_1, m_2, \ldots, m_N$ такие, что матрица $C(m_1, \ldots, m_N)$ невырожденная, тогда μ, $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ и R являются аффинными.

Доказательство. Во-первых, предположим, что μ, $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ и R аффинные. Рассмотрим в качестве кандидата на решение функцию f, задаваемую выражением (6.5) для некоторых A и B. Если можно выбрать A и B так, чтобы уравнение (6.8) удовлетворялось, тогда первая часть утверждения доказана. Так как уравнение (6.11) имеет единственное решение, оно дает равенство (6.12), и действительно, A и B являются решением (6.8), а из этого следует (так как f определяется единственным образом), что f – экспоненциально-аффинная.

Обратно. Предположим, что f – экспоненциально-аффинная, тогда R аффинная. Если, кроме того, существуют $m_1, \ldots, m_N$ такие, что матрица $C(m_1, \ldots, m_N)$, как определено выше, невырожденная, тогда имеется функция $H(.)$, единственное решение уравнения (6.11), которое является линейной комбинацией аффинных функций, и поэтому аффинная, что завершает доказательство.

Следует заметить, что решение (A, B) – не единственное определяемое коэффициентами аффинных форм μ, $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$; оно также зависит от коэффициентов, определяющих R. Хотя уравнения Риккати редко имеют решения в аналитическом виде, решения всегда могут быть получены численными методами (пример будет дан позже). Для одномерных случаев, рассмотренных Васичеком (1977) и CIR (1985), существуют явные решения для (A, B). Аналогично для известных из литературы расширений модели CIR имеются явные решения для B, полученные в силу того, что f имеет вид произведения $\Pi_i f_i(X^{(i)}, \tau)$, где f_i имеет вид функции цены из CIR для дисконтной облигации. L. Chen (1993) рассмотрел трехфакторный частный случай, отличающийся от трехфакторной модели CIR, для которого также получилось решение в явном аналитическом виде. Такая же аффинная модель доходности

(6.5) применяется для случая, когда μ и $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ аффинные, но зависящие от времени, с уравнениями Риккати, также имеющими переменные коэффициенты.

§ 2. АФФИННОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Как показано в утверждении 6.1, аффинный класс моделей временной структуры кажется удобным для анализа и предполагает аналитическое решение уравнений (6.11), (6.12). Теперь обратимся к условиям на области D и коэффициентам аффинных форм μ и $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$, при которых действительно существует единственное (строго) решение стохастического дифференциального уравнения (6.3).

Без потери общности для наших целей будем считать σ симметричной, поскольку для эмпирических задач или целей определения цен активов различие между $\sigma(x)$ и квадратным корнем из $\sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}}$ несущественно. Ниже будет показано, что если матрица $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ аффинная по x, тогда при условии невырожденности и возможной перенумерации индексов можно выбрать уравнение (6.3) в виде

$$dX_t = (aX_t + b)dt + \Sigma \begin{pmatrix} \sqrt{v_1(X_t)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{v_2(X_t)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{v_n(X_t)} \end{pmatrix} dW_t, \quad (6.13)$$

где $X_0 \in D$, $a \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$ и $\Sigma \in \mathbf{R}^{n\times n}$, а

$$v_i = \alpha_i + \beta_i x,$$

где для каждого i параметр α_i является скалярным, а $\beta_i \in \mathbf{R}^n$.

Для существования единственных решений на коэффициенты накладываются ограничения, приведенные ниже.

Векторы коэффициентов $\beta_1, \ldots, \beta_n$ порождают «стохастическую волатильность» (если только они не равны нулю), в этом случае уравнение (6.13) определяет процесс Гаусса – Маркова. Гауссово-марковский случай при постоянной волатильности первоначально исследован Васичеком (1977) и пересмотрен El Karoui, Lacoste (1992) в рамках модели HJM (1992). Этот гауссов случай, конечно, не представляет какой-либо трудности в терминах существования и единственности решений (6.13) при условии $D = \mathbf{R}^n$. Однако случай стохастической волатильности представляет существенную проблему.

Имеются два щекотливых вопроса, которые надо преодолеть, чтобы гарантировать строгие решения (6.13). Во-первых, функция диффузии σ не липшициева. Во-вторых, процесс волатильности $v_i(X_t)$, конечно, должен быть неотрицательным для всех i и t. Открытой областью D неотрицательных волатильностей является

$$D = \{x \in \mathbf{R}^n\colon v_i(x) > 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{6.14}$$

Нужно гарантировать, чтобы имелось единственное решение (6.13), которое остается в области D. Для того чтобы решение существовало, нужно предположить, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ процесс $v_i(X_t)$ имеет достаточный, строго положительный дрейф на сегменте i-й границы $\partial D_i = \{x \in \widetilde{D} : v_i(x) = 0\}$.

Условие А. Для всех i:

а) для всех x таких, что $v_i(x) = 0$, $\beta_i^{\mathrm{T}}(ax + b) > \beta_i^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\beta_i/2$;

б) для всех j, если $(\beta_i^{\mathrm{T}}\Sigma)_j \neq 0$, то $v_i = v_j$.

Обе части условия A являются необходимыми, чтобы гарантировать строго положительную волатильность. Часть б) гарантирует, что член i-й волатильности, когда он обращается в нуль, не приводит к отрицательности из-за зависимости процесса от других ненулевых волатильностей. Эту часть б) можно ослабить, заменив $v_i = v_j$ на «$v_i = kv_j$ для некоторого положительного скалярного k», но это скалярное k может быть учтено в постоянной матрице Σ и заменено единицей без потери общности. Условие A не удовлетворяется в общем случае и является значительным ограничением модели. Пример выполнения условия A (кроме очевидного гауссова случая, когда $\beta_i = 0$ для всех i) дается позже. Все одномерные «процессы с квадратным корнем», встречающиеся в статьях CIR (1985), S. Heston (1991), F. Longstaff, E. Schwartz (1992), R. Chen, L. Scott (1993), удовлетворяют условию A. Часть б) позволяет свернуть многомерные версии модели CIR, каждая составляющая которых является многомерным процессом вида (6.13), в одинаковые выражения стохастической волатильности по каждой координате.

Что касается части а) условия A, то N. Ikeda, S. Watanabe (1981) показали, что неравенство $\beta_i^T b > \beta_i^T \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\beta_i/2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы нулевая граница была недостижимой для одномерного процесса V, определяемого уравнением

$$dV_t = \beta_i b\,dt + \sqrt{V_t}\,\beta_i\Sigma\,dW_t, \qquad V_0 = 0.$$

Доказательство приведенной ниже теоремы расширяет эту идею на многомерный случай, используя часть а) условия A. Интуитивно ясно, что достаточно положительный дрейф процесса $v_i(X_t)$ вблизи границы, где его собственная «волатильность» равна нулю, будет гарантировать, что эта граница недостижима.

Теорема 6.1. При выполнении условия A существует единственное (строго) решение X стохастического дифференциального уравнения (6.13), (6.14) в области D. Кроме того, для этого решения X и любого i имеем $v_i(X_t) > 0$ для всех t почти наверное.

Стоит заметить, что для процесса состояний X, задаваемого этой теоремой, всегда существует строго положительный непостоянный процесс краткосрочной ставки $R(X_t)$. Это следует из теоремы об отделимости гиперплоскости и того факта, что D как пересечение открытых полупространств является выпуклым множеством. Например, можно было бы взять $R(x) = \sum_i \gamma_i v_i(x)$ для неотрицательных γ_i.

Доказательство теоремы является довольно сложным, потому что квадратный корень функции, появляющейся в диффузии, имеет производную, которая достигает бесконечности, когда член стохастической волатильности $v_i(x)$ стремится к нулю. Читатель, не заинтересованный подробностями, может просто пропустить доказательство и без всяких потерь перейти к последующему тексту.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 6.1 непосредственно, необходимо получить ряд вспомогательных результатов. Поэтому сначала обратимся к проблеме существования «аффинных стохастических дифференциальных уравнений», которые в некоторой области состояний $D \in \mathbf{R}^n$ имеют вид

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \qquad X_0 \in D,$$

где μ: $D \to \mathbf{R}^n$ и $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$: $D \to \boldsymbol{M}_s$ – аффинные; через $\boldsymbol{M}$ обозначается пространство вещественных $n \times n$ матриц, а $\boldsymbol{M}_s \subset \boldsymbol{M}$ обозначает подмножество симметрических матриц.

Так как матрица $\theta \equiv \sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ является аффинной, для i и j имеем $\theta_{ij}(x) = a_{ij} + b_{ij}x$ для некоторых a_{ij} из $\mathbf{R}$ и b_{ij} из $\mathbf{R}^n$. Для каждого i из множества $L = \{i : b_{ii} \neq 0\}$ аффинное пространство $A_i \subset \mathbf{R}^n$ корней уравнения $a_{ii} + b_{ii}x = 0$ является $(n - 1)$-мерным многообразием, определяющим точки пространства состояний, которые были бы связаны с нулевой «мгновенной» дисперсией изменений процесса состояний X.

Зафиксируем конкретное «каноническое» пространство состояний $S \subset \mathbf{R}^n$. Поскольку диагональные элементы матрицы $\theta(x)$ аффинные по x и должны быть неотрицательными для всех x, получается, что пространство состояний S содержится в пересечении полупространств $\widehat{S} = \{x\colon \theta_{ii}(x) \ge 0,\ i \in L\}$. Действительно, для замыкания резонно предположить, что $S = \widehat{S}$, так как точка x на границе S, которая *не* лежит на границе $\widehat{S}$, является внутренней точкой $\widehat{S}$. В такой начальной точке (за исключением вырожденных) процесс состояний X будет выходить из S. Поэтому принимаем каноническое пространство S совпадающим с $\widehat{S}$.

Допуская возможность $A_i = A_j$ для некоторых $i \ne j$, мы всегда можем выбрать некоторое минимальное подмножество $K \subset L$ такое, чтобы $\widehat{S} = \{x : \theta_{ii}(x) \ge 0, i \in K\}$.

Примем невырожденность θ. Множество $\{b_{ii} : i \in K\} \subset \mathbf{R}^n$ линейно независимо. Невырожденность, в частности, исключает параллельные границы пространства состояний, что доказывается в любом случае посредством рассмотрения существования решений стохастических дифференциальных уравнений для X, если только два координатных процесса X_i и X_j не пропорциональны друг другу. При невырожденности многообразие $\widehat{A}_i = A_i \cap S$ будет также $(n - 1)$-мерным. Границу пространства состояний S образует $\bigcup_{i \in K} \widehat{A}_i$. Для некоторых $c \in \mathbf{R}$, $d \in \mathbf{R}$ и линейной функции $u\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ назовем *полосой* (*strip*) множество $\{x \in \mathbf{R}^n\colon c \le u(x) \le d\} \subset \mathbf{R}^n$.

Лемма 6.1. Если θ является невырожденной, тогда S не содержится в полосе.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда будет существовать некоторая линейная функция $u\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ такая, что $c \le u(x) \le d$ для всех x в S. Пусть также y будет невырожденным линейным преобразованием x с $y_1 = u(x)$. (То есть мы выберем некоторую инвертируемую линейную функцию $Y\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, такую, что $Y_1(x) = u(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Вместо «$Y(x)$» повсюду будем писать «y» для любой обычной точки $x \in \mathbf{R}^n$.) Для каждого $i \in K$ имеем $b_{ii}x = \widetilde{b}_i y$ для некоторого $\widetilde{b}_i \in \mathbf{R}^n$. Из невырожденности следует, что $\{\tilde{b}_i : i \in K\}$ линейно независимо. Тогда существуют некоторые $i \in K$ и $\hat{y} \in \mathbf{R}^n$ с $\hat{y}_1 \neq 0$ такие, что $\tilde{b}_j \hat{y} = 0$ для всех $j \neq i$ и $\tilde{b}_i \hat{y}_i \geq 0$. Следовательно, для любых $y \in Y(S)$ справедливо $y + \hat{y} \in Y(S)$. Тогда для того чтобы $y_1 \geq c$, $\hat{y}_1$ должно быть положительным. Но для того чтобы иметь $y_1 \leq d$, $\hat{y}_1$ должно быть отрицательным, что приводит к противоречию.

Мы будем говорить, что результат применяется к θ «с точностью до перенумерации индексов», если результат применяется после замены θ на функцию $x \to \{\theta(x)_{\pi(i),\, \pi(j)}\}$ для некоторой перестановки π: $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Так как без потери общности для наших целей σ заменяется на любой «квадратный корень» θ, без потери общности можно предположить, что $\sigma(x)$ является симметрической для всех x.

Лемма 6.2. Если θ невырожденная, тогда с точностью до перенумерации индексов

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} B_1 u_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 u_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_M u_M(x) \end{pmatrix}, \ x \in S, \qquad (6.15)$$

где $1 \leq M \leq n$ и для $i \in \{1, \ldots, M\}$, B_i – $N_i \times N_i$ – положительно полуопределенная симметрическая матрица с $\sum_i N_i = n$ и где $u_1, \ldots, u_M$ – аффинные на $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$ с попарно линейно независимыми линейными компонентами.

Доказательство. Так как $\sigma(x)$ является симметрической, имеем

$$\theta_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(x)\sigma_{kj}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x).$$

В частности,

$$\theta_{ii}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}^2(x).$$

Следовательно, для x таких, что $\theta_{ii}(x) = 0$, мы должны иметь $\sigma_{ik}^2(x) = 0$ для всех k и, таким образом, $\theta_{ij}(x) = 0$ для всех j. Покажем, что $\theta_{ij}(.)$ пропорциональна $\theta_{ii}(.)$, доказывая требуемый результат. Имеются два возможных случая.

1. Предположим, что $\theta_{ii}(.)$ не является постоянной. Из вышеприведенных рассуждений и невырожденности как $\theta_{ii}(.)$, так и $\theta_{ij}(.)$ равны нулю всюду на $\widehat{A}_i$, которое является относительно открытым подмножеством $(n-1)$-мерного аффинного пространства A_i. Можно рассматривать A_i как перенос с помощью некоторого (возможно, нулевого) пересчета b_{ii} линейного подпространства M_i, ортогонального b_{ii}. Так как множество $\widehat{A}_i$ относительно открытое и элемент $\theta_{ij}(.)$ равен нулю всюду на $\widehat{A}_i$, b_{ij} должен быть также ортогональным к подпространству M_i, и, таким образом, $b_{ij} = k_{ij}b_{ii}$ для некоторой константы k_{ij}. Теперь имеем $a_{ii} + b_{ii}x = 0 = a_{ij} + k_{ij}b_{ii}x$ для всех x в $\widehat{A}_i$. Это может быть справедливым, если только $a_{ij} = k_{ij}a_{ii}$. Таким образом, для некоторой скалярной константы k_{ij} (возможно, нулевой) имеем $\theta_{ij}(.) = k_{ij}\theta_{ii}(.)$.

2. Предположим, что $\theta_{ii}(.)$ постоянная. В этом случае $\theta_{ij}(x)$ должна быть тоже постоянной. Если нет, матрица

$$\begin{pmatrix} \theta_{ii}(x) & \theta_{ij}(x) \\ \theta_{ji}(x) & \theta_{jj}(x) \end{pmatrix}$$

не может быть полуположительно определенной. Покажем это. Надо рассмотреть два случая. Если $\theta_{jj}(x) = \theta_{jj}$ постоянная, а θ_{ij} – нет, тогда тот факт, что S не содержится в полосе, влечет нарушение положительной полуопределенности. Если θ_{ij} не постоянная, то из случая 1 $\theta_{ij}(x) = \theta_{ji}$ может быть записана как $k_{ij}\theta_{jj}(x)$ для некоторой скалярной константы k_{ij}. Тогда определитель рассматриваемой выше матрицы будет равен $\theta_{ii}(x)\theta_{jj}(x) - k_{ij}^2\theta_{jj}^2(x)$. Этот определитель может быть в общем случае отрицательным, поскольку S не содержится в полосе. Однако это противоречит положительной полуопределенности $\theta(x)$.

Утверждение 6.2. Предположим, что θ невырожденная и имеется некоторое $\tilde{x} \in S$ такое, что $\theta(\tilde{x})$ является положительно определенной. Тогда существует невырожденная постоянная матрица Q такая, что

$$Q\theta(x)Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & v_n(x) \end{pmatrix}, \; x \in \mathbf{R}^n, \qquad (6.15)$$

где для каждого j функция $\tilde{v}_i \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ аффинная.

Доказательство. Всегда можно написать $\theta(x) = A + \Lambda(x)$, где Λ имеет вид (6.15) и $A \in \boldsymbol{M}_s$ для линейной u_i. Существуют некоторые невырожденные постоянные матрицы P, такие, что PAP^{T} диагональная. Так как $P\Lambda(x)P^{\mathrm{T}}$ симметричная и линейная по x, она должна иметь вид правой части равенства (6.15) для линейных u_i. Поэтому с точностью до перенумерации индексов мы имеем блочно-диагональную форму

$$P\theta(x)P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1u_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 + B_2u_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_M + B_Mu_M(x) \end{pmatrix}, \; x \in \mathbf{R}^n,$$

где для каждого блока i матричные блоки A_i являются диагональными, а B_i – симметрическими.

Рассмотрим конкретный диагональный блок i. Для некоторого $\tilde{x}$ по предположению функции $A_i + B_iu_i(\tilde{x})$ положительно определенные. Можно показать (Р. Беллман, 1969), что существует некоторая невырожденная матрица Q_i такой же размерности, как A_i и B_i, такая, что $Q_i(A_i + B_i\, u_i(\tilde{x}))Q_i^{\mathrm{T}}$ является единичной матрицей, а $Q_iB_iQ_i^{\mathrm{T}}$ – диагональной. Замечая, что

$$A_i + B_iu_i(x) = A_i + B_iu_i(\tilde{x}) + B_i(u_i(x) + u_i(\tilde{x})),$$

можно положить

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & Q_K \end{pmatrix} P.$$

Так как диагональная матрица является диагональной даже после перенумерации индексов, получаем необходимый результат.

Следствие 6.1. В предположениях утверждения 6.2

$$\sigma(x) = \Sigma \begin{pmatrix} \sqrt{v_1(x)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{v_2(x)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{v_n(x)} \end{pmatrix}, \quad x \in S,$$

где Σ – невырожденная матрица; $v_1, \ldots, v_n$ – аффинные функции.

Доказательство. По утверждению 6.2, существует невырожденная матрица Q такая, что $Q\theta(x)Q^{\mathrm{T}} = \Psi(x)$ для всех x, где $\Psi(x)$ диагональная для всех x и аффинная по x. Пусть $v_i(x) = \Psi_{ii}(x)$ и $\Sigma = Q^{-1}$, тогда утверждение следствия последует немедленно.

Это как следствие влечет другую характеризацию.

Следствие 6.2. Матрица θ имеет свойства, предполагаемые в утверждении 6.2, если и только если

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^{\mathrm{T}} \tilde{w}_i(x),$$

где векторы $V_1, \ldots, V_n$ – линейно независимые в $\mathbf{R}^n$; функции $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$ – аффинные на $\mathbf{R}^n$ и неотрицательные на S; существует внутренняя точка в множестве $\{x\colon \tilde{w}_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Теперь имеются характеризованные θ и $\sigma(.)$ при неявном предположении о том, что пространство состояний D имеет форму, принятую для S, т. е. замкнутое пересечение полупространств. Действительно, мы можем и должны взять D как внутренность S и применить условие A, предотвращающее достижения границы S.

Для того чтобы сформулировать лемму сравнения, используемую в доказательстве теоремы 6.1, выпишем следующее свойство функции диффузии.

Условие Ямады. Функция σ: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию Ямады, если она ограничена и измерима и если существует функция ρ: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ строго возрастающая, непрерывная со свойствами $\rho(0) = 0$, $\int_{0+}^{1} \rho(u)^{-2} du = +\infty$ и $|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq \rho(|u - v|)$ для всех u и v.

Например, σ удовлетворяет условию Ямады, если для некоторой константы k она определена равенством $\sigma(u) = \min(\sqrt{u}, k)$.

Лемма 6.3. Предположим, что Z – стандартное броуновское движение, σ удовлетворяет условию Ямады и μ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – липшициева. Тогда имеется единственное (строго) решение стохастического дифференциального уравнения

$$dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dZ_t, \qquad Y_0 > 0. \tag{6.16}$$

Кроме того, предположим, что Y^* является процессом, удовлетворяющим уравнению

$$Y_t^* = Y_0 + \int_0^t \eta_s ds + \int_0^t \sigma(Y_t^*)dZ_t,$$

где η – прогрессивно измеримый процесс, такой, что для всех t имеет место неравенство $\eta_t \geq \mu(Y_t)$. Тогда $Y_t^* \geq Y_t$ для всех t почти наверное.

Доказательство. Доказательство, приведенное в книге N. Ikeda, S. Watanabe (1981), влечет существование и единственность решения (6.16). Для второго утверждения можно распространить стандартный результат сравнения решений стохастического дифференциального уравнения. Распространение требуется для последующего обычного (основанного на неравенстве Гронволла) доказательства выполнения условия Липшица для диффузии. Достаточно показать, что математическое ожидание $E[(Y_t - Y_t^*)^+] = 0$ для любого момента времени t. Это сделаем с небольшим отклонением от доказательства неравенства Икеды – Ватанабе. Пусть

$$\varphi_n(x) = \int_0^{x^+} \int_0^y \psi_n(u)dudy, \quad x \in \mathbf{R},$$

где ψ_n определяется точно так же, как в книге Икеды и Ватанабе, через функцию ρ, удовлетворяющую условию Ямады. Почти так же, как и у Икеды – Ватанабе, имеем $\varphi_n(x) \in C^2(\mathbf{R})$, $0 \leq \varphi_n'(u) \leq 1$ и $\varphi_n(u) \uparrow u^+$, когда $n \to \infty$. Теперь

$$E[\varphi_n(Y_t - Y_t^*)] = E\left[\int_0^t \varphi_n'(Y_s - Y_s^*)[\mu(Y_s) - \eta_s]ds\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}E\int_0^t \varphi_n''(Y_s - Y_s^*)[\sigma(Y_s) - \sigma(Y_s^*)]^2 ds \leq \frac{t}{n}.$$

Равенство получается с помощью леммы Ито, используя тот факт, что φ'_n и σ ограниченные. Неравенство следует из отрицательности первого математического ожидания, условия Ямады и того факта, что $\varphi''_n(u) \le 2\rho^{-2}(|u|)/n$, следуя вычислениям Икеды – Ватанабе. Устремляя n к бесконечности и применяя доминирующую сходимость, получаем

$$0 \le E[(Y_t - Y_t^*)^+] = \lim_{n\to\infty} E[\varphi_n(Y_t - Y_t^*)] \le \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} = 0,$$

что является требуемым результатом.

Доказательство теоремы 6.1. Сначала рассмотрим случай, в котором $v_i(x) = v(x) = \alpha + \beta x$ для всех i. Затем обобщим результат.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ будет строго положительная убывающая последовательность вещественных чисел, сходящаяся к нулю. Для каждого n пусть $X^{(n)}$ будет решением стохастического дифференциального уравнения (6.13) для $t \le \tau_n = \inf\{s : v(X_s^{(n)}) = \varepsilon_n\}$ и $X^{(n)}(t) = X^{(n)}(\tau_n)$ для $t > \tau_n$. Такой процесс будет удовлетворять уравнению (6.13) и поглощаться на границе $\{x : v(x) = \varepsilon_n\}$. Так как функции коэффициентов, определяющих уравнение (6.13), равномерно липшициевы на $\{x : v(x) \ge \varepsilon_n\}$, $X^{(n)}$ является единственным, вполне определенным и строго марковским процессом, что следует из стандартных результатов теории стохастических дифференциальных уравнений.

Для $\tau_0 = 0$ можно определить единственный процесс X на временном интервале $[0, \infty]$, приняв $X_t = X_t^{(n)}$ для $\tau_{n-1} \le t \le \tau_n$ и $X_t = x_0$ для $t >$ $> \tau \equiv \lim_{n\to\infty} \tau_n$. Если $\tau = \infty$ почти наверное, тогда X единственным образом разрешает уравнение (6.13) на $[0, \infty)$ и является строго марковским.

Пусть $V_t = v(X_t)$ – процесс волатильности. Определим

$$dV_t = \eta(X_t)dt + \sqrt{V_t}\, \beta^{\mathrm{T}} \Sigma dW_t,$$

где $\eta(x) = \beta^{\mathrm{T}}(a + bx)$.

Без потери общности можно предположить, что ε_1 достаточно близко к нулю, поэтому, используя условие A, имеем вещественную положительную константу $\tilde{\eta} > \beta^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\beta/2$ такую, что выполняются неравенства $\eta(x) \ge \tilde{\eta} > 0$ для всех x в полосе $\{x : 0 \le v(x) \le \varepsilon_1\}$. Также без потери общности предположим, что $v(x_0) > \varepsilon_1$. Ниже построим строго положительный процесс «сравнительной волатильности» $\widetilde{V}$ такой, что $V_t \geq \widetilde{V}_t$ почти наверное для всех t. Для него $\tau_n \geq \widetilde{\tau}_n = \inf\{t : \widetilde{V}_t = \varepsilon_n\} \to \infty$ почти наверное, что завершает доказательство.

Для того чтобы построить $\widetilde{V}$, сначала построим «отклонение» X, определяемое переходом $v(X_t)$ от ε_2 до ε_1. Временными интервалами отклонения являются $[T(i), T^*(i)]$, где $T^*(0) = 0$, а для $i \geq 1$

$$T(i) = \inf\{t \geq T^*(i-1) : v(X_t) = \varepsilon_2\}; \;\; T^*(i) = \inf\{t \geq T(i) : v(X_t) = \varepsilon_1\}.$$

Для $t \in [T(i), T^*(i)]$ примем

$$\widetilde{V}_t = \varepsilon_2 + (t - T(i))\widetilde{\eta} + \int_{T(i)}^{t} \sqrt{\widetilde{V}_t}\, dZ_t,$$

где $Z = \beta^{\mathrm{T}}\Sigma W$ (т. е. Z является многомерным стандартным броуновским движением).

Для момента времени t в других (не отклонения) интервалах $[T^*(i), T(i+1)]$ положим $\widetilde{V}_t = V_t$. Процесс $\widetilde{V}$ – строго положительный. Он, очевидно, является отклонениями, и продолжительность отклонений определяется в книге Н. Икеды и С. Ватанабе.

Потребуем, чтобы $\widetilde{V}_t \leq V_t$ для всех t почти наверное. Ясно, что это неравенство устанавливается отклонениями. В течение i-го отклонения V задается выражением

$$V_t = \varepsilon_2 + \int_{T(i)}^{t} \eta(X_s)\, ds + \int_{T(i)}^{t} \sqrt{V_s}\, dZ_s.$$

Так как $\widetilde{\eta} < \eta(X_t)$ для всех $t \in [T(i), T^*(i)]$, лемма сравнения, сформулированная перед настоящим доказательством, показывает, что в течение отклонения $\widetilde{V}_t \leq V_t$ почти наверное. Доказательство завершается в рассматриваемом случае единственного стохастического фактора волатильности.

Теперь для общего случая положим

$$D_n = \{x \in D : v_i(x) \geq \varepsilon_n, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Как и прежде, имеется единственное решение $X^{(n)}$ стохастического дифференциального уравнения (6.13) в D_n вплоть до момента первого попадания $\tau_n = \inf\{t : \min_i v_i(X_t^{(n)}) = \varepsilon_n\}$ и пусть $X^{(n)}(t) = X^{(n)}(\tau_n)$ для всех $t > \tau_n$. Снова мы определим предельный процесс X. Доказательство продолжается, как и прежде, исключая тот факт, что сейчас имеется процесс сравнения волатильностей $\widetilde{V}_i$ для каждого i, определяемый через i. При использовании части б) условия A, по существу, те же рассуждения, как и выше, показывают, что для всех i имеет место неравенство $v_i(X_t) \geq \widetilde{V}_{it} > 0$ для всех t почти наверное. Тогда результат следует, как и в более простом случае, рассмотренном вначале. Теорема 6.1 доказана.

§ 3. АФФИННЫЕ ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ

В предыдущих параграфах представлена относительно общая теория аффинных моделей временной структуры с абстрактными факторами. С этой точки зрения полезно рассмотреть ситуации, в которых для фиксированных сроков погашения $\tau_1, \ldots, \tau_n$ для всех i и t можно рассматривать X_{it} как доходность в момент времени t на дисконтную облигацию со сроком погашения τ_i. Практические преимущества выбора в качестве факторов доходностей с фиксированным сроком погашения очевидны. Для того чтобы тройка (f, μ, σ) была аффинной факторной моделью с $f(x, \tau) = \exp[A(\tau) + B(\tau)x]$ и

$$x_i = -[\ln f(x, \tau_i)]/\tau_i, \quad x \in D, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

нам нужны не только начальные условия $A(0) = 0$ и $B(0) = 0$ для уравнений (6.11), (6.12), но и чтобы для всех i

$$A(\tau_j) = B_i(\tau_j) = 0, \quad j \neq i, \quad B_i(\tau_i) = -\tau_i. \qquad (6.17)$$

Назовем совместимую факторную модель (f, μ, σ), удовлетворяющую соотношениям (6.5) и (6.17), *аффинной факторной моделью доходности*.

Имеются два возможных способа построения аффинной факторной модели доходности. Сначала можно предположить, что факторы являются доходностями, и гарантировать, что коэффициенты, определяющие (f, μ, σ), выбираются так, чтобы удовлетворялись условия (6.17). Вернемся к этому прямому способу несколько позже.

В другом (непрямом) способе будем считать X процессом состояний для произвольной факторной модели (f, μ, σ) и попытаемся сделать замену переменных от первоначального вектора состояния X_t к новому вектору состояния доходностей $Y_t \in \mathbf{R}^n$, определяемому равенством

$$Y_{it} = -[A(\tau_i) + B(\tau_i)X_t]/\tau_i.$$

При условии, что матрица K, (i, j)-элементами которой являются функции $-B_j(\tau_i)/\tau_i$, невырожденная, получаем, что $X_t = K^{-1}(Y_t + k)$, где $k_i = A(\tau_i)/\tau_i$, что делает возможной замену переменной. В этом случае можно написать

$$dY_t = \mu^*(Y_t)\,dt + \sigma^*(Y_t)\,dW_t,$$

где

$$\mu^*(y) = K\mu[K^{-1}(y + k)], \quad \sigma^*(y) = K\sigma[K^{-1}(y + k)], \qquad (6.18)$$

которые вполне определены в области $D^* = \{Kx - k : x \in D\}$. Эквивалентной моделью временной структуры является (f^*, μ^*, σ^*), где

$$f^*(y, \tau) = \exp[A^*(\tau) + B^*(\tau)\,y],$$

а функции $A^*(\tau) = A(\tau) + B(\tau)^{\mathrm{T}}K^{-1}k$ и $B^*(\tau)^{\mathrm{T}} = B(\tau)^{\mathrm{T}}K^{-1}$.

Очевидно, что (f^*, μ^*, σ^*) – аффинная факторная модель доходности.

Несмотря на то что мы достигли цели не прямо, а посредством замены переменных, с практической точки зрения функция «ковариации» $\sigma^*(.)\sigma^*(.)^{\mathrm{T}}$, определяемая соотношением (6.18), может быть громоздкой при «калибровке» наблюдаемых волатильностей или корреляций на основе текущих или прошлых данных, касающихся цен, так как матрица K зависит от первоначальных параметров, определяющих μ и σ, через решения уравнения Риккати (6.11), (6.12). Тогда имеются практические основания начинать с аффинной факторной модели (f, μ, σ), для которой вектором состояний X_t является вектор доходностей для фиксированных сроков погашения $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Матрица Σ и относящиеся к волатильности коэффициенты α_i и β_i могли бы выбираться прямо из калибровки или экономического оценивания или из того и другого. Однако остается вопрос согласованности с определением X_{it} как доходности дисконтной облигации для срока погашения τ_i, т. е. с граничными условиями (6.17). Только с помощью регулировки коэффициентов в μ и σ можно добиться, чтобы решение уравнений (6.11), (6.12) удовлетворяло обоим нулевым начальным условиям, а также граничному условию (6.17). В то же время нам нужно не нарушать условие A, которое гарантирует существование решения стохастического дифференциального уравнения, определяемого (μ, σ). Пока нет теоретических результатов, описывающих, как можно заранее устанавливать определенные коэффициенты, а другие подбирать так, чтобы достичь согласия с этими различными условиями. Однако на практике мы не сталкиваемся с какими-либо проблемами при установлении коэффициентов для σ и последующем подборе коэффициентов дрейфа так, чтобы получить согласие, по крайней мере, для двухфакторного случая. Далее будет объяснено, как это сделать для двухфакторной модели.

Простые примеры

В качестве примера для иллюстрации метода дадим более явное исследование частных случаев, включающих единственный фактор волатильности или случай нестохастической волатильности: $\beta = 0$. В последнем случае решение стохастического дифференциального уравнения для факторов является гауссовым. В статье El Karoui, V. Lacoste (1992) рассмотрен этот гауссов случай, хотя они работали с моделями форвардной ставки в рамках метода HJM. То есть фактически в качестве факторов они взяли форвардные ставки определенных сроков погашения в рамках подхода HJM. Так как доходность для любого срока погашения является аффинной относительно факторов, факторные модели доходности и форвардной ставки в нашей постановке математически эквивалентные. Однако подход HJM выходит за ее пределы, поскольку допускает любую исходную временную структуру. El Karoui, V. Lacoste также подробно рассмотрели проблему выбора факторов.

С этой точки зрения для простоты примем $X_t = (X_{0t}, X_{1t}, \ldots, X_{n-1,\, t})$ при $R(X_t) = X_{0t}$. Это значит, что в качестве одного из факторов принимается сама краткосрочная ставка. Незначительное изменение в обозначениях, вызванное этим, очевидно и не требует дальнейших комментариев. Возьмем также единственный член стохастической волатильности, т. е. $v_i(x) = v_j(x) = \alpha + \beta x$ для всех i, j и x.

Хотя традиционно в качестве одного из факторов берут краткосрочную ставку, однако в этом нет необходимости. Действительно, взяв краткосрочную ставку в качестве переменной состояния, можно вызвать эмпирические трудности, по крайней мере, если модель приспособлена к «краткосрочной ставке» данных, которые часто имеют особенности. Известно, что краткосрочная ставка непосредственно не наблюдается и является пределом доходности, а не самой доходностью.

В этом частном случае уравнения (6.11), (6.12) можно записать в виде

$$\begin{cases} A'(t) = bB(t) + \alpha q(t)/2, \\ B_0'(t) = a_0 B(t) + \beta_0 q(t)/2 - 1, \\ B_i'(t) = a_i(t)B(t) + \beta_i q(t)/2, \qquad i \in \{1, ..., n-1\}, \end{cases} \tag{6.19}$$

где

$$q(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \Sigma_i \Sigma_j^{\mathrm{T}} B_i(t) B_j(t).$$

Для случая детерминированной волатильности, определяемой посредством $\beta = 0$, последние n уравнений образуют простую линейную систему, которая имеет стандартное решение:

$$B_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_{ij} \exp(\lambda_j \tau) + \psi_{in}, \;\; i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{6.20}$$

где $\{\psi_{ij}\}$ – константы, которые могут быть легко вычислены и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ являются n корнями (кратность не предполагается) характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & \ldots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Решение для B затем подставляется в первое уравнение (6.19), чтобы получить A посредством простого интегрирования.

Если используются только два первых фактора x_0 и x_1, то получается

$$\lambda_{0,1} = (a_{00} + a_{11} \pm \sqrt{\Delta})/2,$$

где $\Delta = a_{00}^2 + a_{11}^2 + 4\, a_{10}\, a_{01} - 2\, a_{00}\, a_{11}$.

Тогда ограничения (6.17) можно выписать явно как ограничения на коэффициенты дрейфа вида

$$(a_{00} - a_{11} + \sqrt{\Delta})(a_{00} - a_{11} - \sqrt{\Delta})\exp(\lambda_0\tau_1) - 4\, a_{11}\sqrt{\Delta} -$$

$$- (a_{00} - a_{11} - \sqrt{\Delta})(a_{00} + a_{11} + \sqrt{\Delta})\exp(\lambda_1\tau_1) = 0,$$

$$a_{01}\,(a_{00} + a_{11} - \sqrt{\Delta}\,)\exp(\lambda_0\tau_1) - a_{01}(a_{00} + a_{11} + \sqrt{\Delta}\,)\exp(\lambda_1\tau_1) +$$

$$+ 2\sqrt{\Delta}\,[a_{01} + \tau_1(a_{01}a_{10} - a_{00}\,a_{11})] = 0.$$

Этот пример детерминированной волатильности расширяется ниже, когда мы предлагаем явное и численное решения для цен опционов на облигации путем адаптации к нашей модели результатов Jamshidian (1989, 1991), El Karoui, Rochet (1989) и других.

Двухфакторная модель стохастической волатильности

Сосредоточим внимание на двухфакторном случае. Сначала рассмотрим ограничение на коэффициенты, требуемое для неотрицательности волатильности. В этом случае гиперплоскость, определяющая нулевую волатильность, задается равенством

$$H = \{(x_0, x_1) : \alpha + \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 = 0\}.$$

Без потери общности, если $\beta_1 \neq 0$, возьмем $\beta_1 = 1$, так что на H мы имеем $x_1 = -(\alpha + \beta_0 x_0)$. На H для $V_t = \alpha + \beta_0 X_{0t} + \beta_1 X_{1t}$ функция дрейфа, следовательно, равна

$$\beta_0\mu_0(x) + \beta_1\mu_1(x) = \beta_0[b_0 + a_{00}x_0 - a_{01}(\alpha + \beta_0 x_0)] +$$

$$+ b_1 + a_{10}x_0 - a_{11}(\alpha + \beta_0 x_0)] = k_0 + k_1 x_0,$$

где

$$k_0 = \beta_0 b_0 - \alpha\beta_0 a_{01} + b_1 - \alpha a_{11},$$

$$k_1 = \beta_0 a_{00} - \beta_0^2 a_{01} + a_{10} - \beta_0 a_{11}.$$

В этом случае факторная аффинная модель доходности предусматривает для b, a и Σ на многообразии, удовлетворяющем (6.19), выполнение (6.17) и

$$k_0 > 0,\ \ k_1 = 0. \tag{6.21}$$

Ниже будет приведен численный пример.

Конечно-разностное решение цен финансовых производных

По определению эквивалентной мартингальной меры актив, предусматривающий платеж u в момент времени T, имеет цену в любой момент времени $t < T$, задаваемую равенством

$$E\left[\exp\left(-\int_t^T R(X_s)ds\right)\times u\middle|F_t\right].$$

Если u – случайная величина, которая является измеримой функцией временной структуры в момент времени T, тогда (так как временная структура сама измеримая функция переменных состояния X_T) можно написать $u = g(X_T)$ и выразить цену в виде

$$F(X_t, t) = E\left[\exp\left(-\int_t^T R(X_s)ds\right)\times g(X_T)\middle|X_t\right]. \quad (6.22)$$

При слабых условиях регулярности (см., например, Гихман и Скороход, 1972), единственное решение (6.22) удовлетворяет УЧП

$$\boldsymbol{D}F(x, t) - R(x)F(x, t) = 0, \ x \in D, \quad (6.23)$$

где $\boldsymbol{D}F(x, t)$ определяется равенством (6.6) с граничным условием

$$F(x, t) = g(x), \quad x \in D.$$

Имеются хорошо известные конечно-разностные алгоритмы для решения параболических УЧП этого вида. Для того чтобы упростить численное решение в двухфакторном случае, описанном в предыдущем подпараграфе, удобно сделать замену переменных:

$$y = \frac{1}{1 + k\sqrt{\alpha + \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1}}, \quad z = \operatorname{arctg}[h(\theta_1 x_1 - \theta_0 x_0)],$$

где параметры $\theta_0 = \beta_1\Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}} + \beta_0\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}$ и $\theta_1 = \beta_0\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} + \beta_0\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}$. Легко видеть, что $0 \le y \le 1$ и $-\pi/2 \le z \le \pi/2$.

Инверсия этого преобразования определяется выражениями

$$x_0 = \xi_0 + \eta_0 \frac{(1-y)^2}{k^2 y^2} + \zeta_0 \frac{\operatorname{tg} z}{h}, \quad x_1 = \xi_1 + \eta_1 \frac{(1-y)^2}{k^2 y^2} + \zeta_{10} \frac{\operatorname{tg} z}{h},$$

где

$$\xi_0 = -\frac{\alpha\theta_1}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0}; \quad \xi_1 = -\frac{\alpha\theta_{01}}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0}; \quad \eta_0 = \frac{\theta_1}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0};$$

$$\eta_1 = \frac{\theta_0}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0}; \quad \zeta_0 = -\frac{\beta_1}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0}; \quad \zeta_0 = \frac{\beta_0}{\beta_0\theta_1 + \beta_1\theta_0}.$$

Тогда (6.23) записывается для $\widetilde{F}(y, z, t) \equiv F(x_0, x_1, t)$ в виде

$$-\mu\widetilde{F} + \mu_t\widetilde{F}_t + \mu_y\widetilde{F}_y + \mu_z\widetilde{F}_z + \sigma_y\widetilde{F}_{yy} + \sigma_z\widetilde{F}_{zz} = 0, \qquad (6.24)$$

где

$$\mu_t = k^2y^2(1-y)\cos(z);$$

$$\mu = k^2y^2\xi_0(1-y)\cos(z) + \eta_0(1-y)^3\cos(z) + k^2y^2\zeta_0(1-y)\sin(z)/h;$$

$$\mu_y = -(k^2y^3/2)(\mu_{y0}k^2y^2\cos(z) + \mu_{y1}(1-y)^2\cos(z) + \mu_{y2}k^2y^2\sin(z)/h) +$$

$$+ (k^4y^5/8)(\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}\beta_0{}^2 + \Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}}\beta_1{}^2 + 2\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}\beta_0\beta_1)(3-2y)\cos(z);$$

$$\mu_z = -h(1-y)\cos^2(z)(\mu_{z0}k^2y^2\cos(z) + \mu_{z1}(1-y)^2\cos(z) + \mu_{z2}k^2y^2\sin(z)/h) -$$

$$- h^2(\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}\theta_0{}^2 + \Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}}\theta_1{}^2 - 2\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}\theta_0\theta_1)(1-y)^3\cos^4(z)\sin(z);$$

$$\sigma_y = (k^4y^6/8)(\beta_0{}^2\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} + 2\beta_0\beta_1\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}} + \beta_1{}^2\Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}})(1-y)\cos(z);$$

$$\sigma_z = (h^2/2)(\theta_0{}^2\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} + 2\theta_0\theta_1\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}} + \theta_1{}^2\Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}})(1-y)^3\cos^5(z),$$

при

$$\mu_{y0} = \beta_0b_0 + \beta_1b_1 + \beta_0a_{00}\xi_0 + \beta_1a_{10}\xi_0 + \beta_0a_{01}\xi_1 + \beta_1a_{11}\xi_1,$$

$$\mu_{y1} = \beta_0a_{00}\eta_0 + \beta_1a_{10}\eta_0 + \beta_0a_{01}\eta_1 + \beta_1a_{11}\eta_1,$$

$$\mu_{y2} = \beta_0a_{00}\zeta_0 + \beta_1a_{10}\zeta_0 + \beta_0a_{01}\zeta_1 + \beta_1a_{11}\zeta_1,$$

$$\mu_{z0} = \theta_0b_0 - \theta_1b_1 + \theta_0a_{00}\xi_0 - \theta_1a_{10}\xi_0 + \theta_0a_{01}\xi_1 - \theta_1a_{11}\xi_1,$$

$$\mu_{z1} = \theta_0a_{00}\eta_0 - \theta_1a_{10}\eta_0 + \theta_0a_{01}\eta_1 - \theta_1a_{11}\eta_1,$$

$$\mu_{z2} = \theta_0a_{00}\zeta_0 - \theta_1a_{10}\zeta_0 + \theta_0a_{01}\zeta_1 - \theta_1a_{11}\zeta_1.$$

Переход от уравнения (6.23) к уравнению (6.24) имеет два основных преимущества. Во-первых, мы преобразовали координаты x_0 и x_1, которые в общем случае могут принимать любые вещественные значения, в координаты y и z, которые принимают свои значения в компактном множестве. Равномерно покрывающая сетка на этом компактном множестве подразумевает сгущение узлов сетки на первоначальных переменных, чем можно контролировать точность решения, размещая большую плотность сетки вблизи наиболее часто наблюдаемых значений ставок. Во-вторых, мы ортогонализировали систему, так что может быть применен конечно-разностный метод переменных направлений (*alternating directions*) при условии отсутствия в уравнении (6.24) смешанных частных производных по двум новым пространственным переменным y и z.

Пример стохастической волатильности

Приведем пример двухфакторной модели, рассмотренной в предыдущем подпараграфе.

Сначала мы решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} B_0'(t) &= a_{00}B_0(t) + a_{10}B_1(t) + \beta_0 q(t)/2 - 1, \\ B_1'(t) &= a_{01}(t)B_0(t) + a_{11}(t)B_1(t) + \beta_1 q(t)/2, \end{aligned} \tag{6.25}$$

где

$$q(t) = \Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}B_0^{\,2}(t) + \Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}}B_1^{\,2}(t) + 2\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}B_0(t)B_1(t),$$

при начальных условиях $B_0(0) = B_1(0) = 0$, используя метод Рунге – Кутта четвертого порядка. Полученное решение (B_0, B_1) зависит от вектора параметров (a, Σ). Затем, фиксируя Σ, используем алгоритм Ньютона – Рафсона, чтобы найти a так, чтобы согласовать соответствие условиям (6.17): $B_0(\tau_1) = 0$ и $B_1(\tau_1) = -\tau_1$. Как хорошо известно, качество многомерного алгоритма Ньютона – Рафсона существенно зависит от точности исходной точки. Предположим, что решение для случая детерминированной волатильности найдено, и используем его здесь в качестве исходной точки. Решение ОДУ методом Рунге – Кутта четвертого порядка и алгоритм поиска Ньютона – Рафсона можно найти в соотвествующих учебниках по вычислительной математике.

После решения уравнения (6.25) относительно B можно численно интегрировать

$$A'(t) = b_0B_0(t) + b_1B_1(t) + \alpha q(t)/2, \quad A(0) = 0,$$

чтобы найти A, а затем выбрать b_0 и b_1 так, чтобы согласовать соответствие условию $A(\tau_1) = 0$.

Для примера зафиксируем параметры $b_0 = -\,0{,}1$, $a_{01} = 0{,}76$, $\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} = \Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}} = 0{,}9$, $\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}} = 0{,}7$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta_0 = -\,1{,}08$ и $\beta_1 = 1$. Используем алгоритм Ньютона – Рафсона для нахождения a_{00} и a_{11}, удовлетворяющих начальным условиям. Для завершения итераций алгоритма Ньютона – Рафсона используется правило остановки, когда $|B_0(\tau_1)| < 10^{-4}$ и $|B_1(\tau_1) + \tau_1| < 10^{-4}$. В табл. 6.1 представлены результаты вычислений. Размер сетки является обратно пропорциональным размеру шага, использованному для численного решения ОДУ. Коэффициент a_{10} вычисляется подстановкой $k_1 = 0$ согласно условию (6.21), в то время как

b_1 вычисляется подстановкой $A(\tau_1) = 0$. Полученный набор параметров удовлетворяет условию A существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений (6.13), (6.14).

Таблица 6.1

Числовые параметры решения

Размер сетки N	a_{00}	a_{11}	a_{10}	b_1
10001	–0,6419	3,7377	–3,900	0,1278
20001	–0,6418	3,7374	–3,900	0,1278

Применяя параметры, приведенные выше, используем неявный метод переменных направлений (*alternating direction implicit*, ADI) для решения УЧП (6.23) в виде (6.24). В относительных величинах параметры b и a получаются гораздо быстрее, чем при решении УЧП при абсолютном задании параметров. Как известно, пока не имеется общей теории, гарантирующей сходимость алгоритма ADI, когда он применяется к определенным задачам. В нашем случае этот метод в действительности расходится вблизи некоторых границ, быть может, из-за быстрого изменения значения $\widetilde{F}$ вблизи этих границ. (На самом деле $\widetilde{F}$ неограниченная вдоль некоторых границ из-за того, что x_0 и x_1 могут быть отрицательными в рассматриваемой нами параметризации модели.) Для того чтобы восстановить сходимость, применяется алгоритм ADI в области $\{y \in [\delta_1, 1 - \delta_2]$ и $z \in [-\pi/2 + \delta_3, \pi/2 - \delta_4]\}$, где δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4 – малые неотрицательные числа. Путем соответствующего выбора этих малых чисел можно действительно получить сходимость, как показано ниже. В принципе время вычислений можно уменьшить методом чередования неявных и явных шагов.

Таблица 6.2

Пример конечно-разностного решения УЧП для цен облигации и опциона на облигацию (цены опциона на облигацию даны в скобках)

Ставка		Размер сетки N			Точное решение
краткосрочная (x_0)	долгосрочная (x_1)	111	221	331	∞
0,1070	0,1584	0,8464 (0,0578)	0,8531 (0,0610)	0,8532 (0,0606)	0,8535
0,0336	0,0791	0,9179 (0,0888)	0,9251 (0,0926)	0,9246 (0,0922)	0,9240
0,0710	0,0593	0,9411 (0,0879)	0,9420 (0,0886)	0,9421 (0,0883)	0,9424

Для того чтобы представлять точность рассматриваемого метода, в табл. 6.2 приводятся численные результаты для цены дисконтной облигации с единичным сроком погашения. Точный результат дается формулой $\exp(-x_1)$. В круглых скобках также дается численное решение УЧП для цены американского опциона-колл на эту облигацию, погашаемого в момент 0,5 с ценой исполнения 0,9. Здесь также выбрано $k = h = 12{,}5$, $\delta_1 = 0{,}01$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$ и $\delta_4 = 0{,}01$.

Пример определения цены опциона на облигацию при детерминированной волатильности

Для процесса краткосрочной ставки, который может рассматриваться как составляющая многомерного процесса Гаусса – Маркова, F. Jamshidian (1989, 1991), El Karoui, J. Rochet (1989) и другие вычисляли цены опционов на облигацию точно. В этой постановке мы можем использовать наши результаты, чтобы выбрать коэффициенты процесса Гаусса – Маркова так, чтобы переменные состояния принимались как доходности. В связи с этим получим удобный пример, в котором цены опционов на облигацию могут вычисляться через доходности для базисных сроков погашения, и, таким образом, сможем проверить точность нашего численного решения для цен опционов.

Для примера выберем двухфакторную модель доходности с детерминированной волатильностью с $\alpha = 1$ и $\beta_0 = \beta_1 = 0$. При преобразовании переменных

$$y = \operatorname{arctg}(kx_0), \qquad z = \operatorname{arctg}[h(\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}x_1 - \Sigma_0\tilde{\sigma}_1^{\mathrm{T}}x_0)],$$

УЧП (6.23) можно записать в виде (6.24), в котором

$$\mu_t = kh\cos(y)\cos(z), \;\; \mu = h\sin(y)\cos(z),$$

$$\mu_y = kh\cos^2(y)\cos(z)[kb_0\cos(y) + a_{00}\sin(y) - k^2\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}\cos^2(y)\sin(y) +$$

$$+ (ka_{01}/\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}})\cos^2(y)[h\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}\sin(y)\cos(z) + k\cos(y)\sin(z)],$$

$$\mu_z = kh^2\cos(y)\cos^3(z)[b_1\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} - b_0\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}} + h\cos(z)\sin(z)\,\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}((\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}})^2 -$$

$$- (\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}})(\Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}}))] + h^2\cos^3(z)\sin(y)(a_{10}\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} - a_{00}\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}) +$$

$$+ (h/\tilde{\sigma}_0\Sigma_0^{\mathrm{T}})(a_{11}\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}} - a_{01}\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}})(h\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}}\sin(y)\cos(z) + k\cos(y)\sin(z)),$$

$$\sigma_y = (k^3h\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}/2)\cos^5(y)\cos(z),$$

$$\sigma_z = (kh^3\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}}/2)[(\Sigma_0\Sigma_0^{\mathrm{T}})(\Sigma_1\Sigma_1^{\mathrm{T}}) - (\Sigma_0\Sigma_1^{\mathrm{T}})^2]\cos(y)\cos^5(z).$$

Чтобы обеспечить сходимость вычислений, ограничимся только областью $y \in [-\pi/2 + \delta_1, \pi/2 - \delta_2]$, $z \in [-\pi/2 + \delta_3, \pi/2 - \delta_4]$.

Применяя результаты F. Jamshidian (1989, 1991), можно показать, что в момент t цена европейского опциона-колл на дисконтную облигацию с платежом 1 в момент T с ценой исполнения K и датой истечения $\tau^* < T$ дается выражением

$$C(X_t, t) = f(X_t, T-t)N[\Lambda(X_t, t) + \sigma^*(X_t, t)/2] -$$

$$- Kf(X_t, \tau^* - t)N[\Lambda(X_t, t) - \sigma^*(X_t, t)/2],$$

где $\Lambda(X_t, t) = \dfrac{1}{\sigma^*(t)} \ln\left(\dfrac{f(X_t, T-t)}{Kf(X_t, \tau^* - t)}\right)$; $N[.]$ обозначает функцию распределения стандартного нормального распределения, а σ^* является функцией на $[0, \tau^*]$, задаваемой равенством $\sigma^*(X_t, t)^2 = \int_t^{\tau^*} H(s)ds$, где

$$H(s) = \Sigma_0 \Sigma_0^{\mathrm{T}} [B_0(T-s) - B_0(\tau^* - s)]^2 + \Sigma_1 \Sigma_1^{\mathrm{T}} [B_1(T-s) - B_1(\tau^* - s)]^2 +$$

$$+ 2\Sigma_0 \Sigma_1^{\mathrm{T}} [B_0(T-s) - B_0(\tau^* - s)] \times [B_1(T-s) - B_1(\tau^* - s)],$$

где $B_0(.)$ и $B_1(.)$ задаются соотношением (6.20).

Формула для определения цены опциона (6.26) является версией формулы Блэка – Шоулса (1973).

Для нашего численного примера возьмем $b_0 = -0{,}1$, $b_1 = 0{,}6453$, $a_{00} = -0{,}9651$, $a_{01} = 0{,}59$, $a_{10} = -3{,}21$, $a_{11} = 3{,}5802$, $\Sigma_0 \Sigma_0^{\mathrm{T}} = \Sigma_1 \Sigma_1^{\mathrm{T}} = 1{,}0$, $\Sigma_0 \Sigma_1^{\mathrm{T}} = 0{,}6$, $k = h = 12{,}5$, $\delta_1 = \delta_3 = 0{,}01$, $\delta_2 = \delta_4 = 0$.

В табл. 6.3 приводятся вычисленные цены европейского колла с ценой исполнения $K = 0{,}9$, временем истечения опциона $\tau^* = 0{,}5$ и сроком погашения облигации $T = 1{,}0$.

Таблица 6.3

Цены облигации и опциона на облигацию при детерминированной волатильности (цены опционов на облигации даны в скобках)

Ставка		Размер сетки N			Точное решение
краткосрочная (x_0)	долгосрочная (x_1)	111	221	331	∞
0,1106	0,1751	0,8490 (0,1158)	0,8376 (0,1060)	0,8403 (0,1065)	0,8394 (0,1065)
0,05849	0,03509	1,0001 (0,1761)	0,9671 (0,1677)	0,9668 (0,1681)	0,9240 (0,1679)
0,02635	0,07344	0,9493 (0,1520)	0,9281 (0,1415)	0,9309 (0,1424)	0,9292 (0,1421)

§ 4. СКАЧКООБРАЗНЫЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Из-за возможности внезапных изменений для идентификации будущих процентных ставок можно допустить «неожиданные» скачки вектора состояния X. Например, можно использовать аффинную факторную модель доходности со стандартной моделью скачкообразных диффузионных процессов X, основанную на инфинитезимальном операторе $\boldsymbol{D}^*$, определяемом равенством

$$\boldsymbol{D}^*F(x, t) = \boldsymbol{D}F(x, t) + \lambda(x)\int\limits_D [F(x+z, \quad t) - F(x, \quad t)] \quad dv(z),$$

где $\boldsymbol{D}$ – диффузионный оператор, определенный соотношением (6.6); λ: $D \to \boldsymbol{R}_+$ – аффинная функция, определяющая интенсивность $\lambda(X_t)$ возникновения скачков процесса X в момент t; v – определенная вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$, определяющая распределение величины скачков.

Как и до сих пор, дисконтная облигация с датой погашения T имеет цену $F(x, t)$ в момент времени t, когда при необходимых условиях регулярности F является решением УЧП:

$$\boldsymbol{D}^*F(x, t) - R(x)F(x, t) = 0 \qquad (6.26)$$

с граничным условием

$$F(x, T) = 1. \qquad (6.27)$$

Когда μ, $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$, ρ и λ являются аффинными функциями в пространстве состояний D, УЧП (6.26), (6.27) при необходимых условиях регулярности имеет решение в обычной экспоненциальной форме:

$$F(x, t) = \exp[a(T - t) + b(T - t)x], \qquad (6.28)$$

где a: $[0, T] \to \mathbf{R}$ и b: $[0, T] \to \mathbf{R}^n$ – решения ОДУ, которые во многих случаях достаточно просто решаются численными методами. Как это можно видеть, подставляя функцию (6.28) в уравнение (6.26), для того, чтобы получить ОДУ для b, удобно выбирать распределение v таким, чтобы его преобразование Лапласа $\theta(.)$ выражалось в явной форме так, чтобы избежать численных расчетов члена $\theta[b(T - t)]$. Подходящими будут комбинации экспоненциальных, гауссовых, биномиальных и вырожденных (когда величины скачков фиксированы) распределений, хотя нужно быть внимательным при выборе распределения так, чтобы гарантировать процессу состояний X оставаться в пространстве состояний D при появлении скачков в любой точке пространства состояний. Для частного гауссова случая (в котором $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ является постоянной, а ν – гауссовым распределением на $D = \mathbf{R}^n$) решение в явном аналитическом виде получено в работе S. Das (1993). Решение в явной аналитической форме также получается, когда $\boldsymbol{D}$ выбирается как оператор, ассоциированный с многофакторной моделью CIR, а ν выбирается как произведение n экспоненциальных распределений.

Путем изменения граничных условий (6.27) для обеспечения заданных платежей финансовых производных можно также определить стоимость финансовой производной. Численное решение УЧП с помощью конечных разностей не вызывает особых трудностей, хотя обычный шаговый алгоритм обращения неявных разностных шагов при невырожденных распределениях скачков применяется непрямо. Имеется достаточно практичный численный алгоритм для определения стоимости опционов в двухмерных частных случаях с экспоненциально распределенными величинами скачков.

Следует заметить также, что при наличии скачков может оказаться невозможным полностью хеджировать заданный иск с меньшим количеством позиций в других исках, чем количество элементов, на которых определено распределение величин скачков ν.

ГЛАВА
7

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА В МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЯХ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

§ 1. УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА В ОДНОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

На финансовом рынке арбитражем называют возможность получения торговой прибыли без каких-либо потерь. Идея, выражаемая условием отсутствия арбитража, заключается в том, что на равновесном рынке два портфеля ЦБ, которые обеспечивают одинаковые платежи, должны иметь в каждый момент времени одинаковую цену. Интуитивно ясно, что такое определение цены исключает арбитраж. В последнее время является популярной арбитражная теория определения цен рыночных активов, которая базируется на предположении, что финансовый рынок свободен от арбитража. Для проверки выполнения такого предположения следует иметь условия отсутствия арбитража. Этим и объясняется интерес к формированию таких условий.

При рассмотрении математических моделей изменения цен на финансовом рынке с непрерывным временем обычно принимается, что процессы процентных ставок на рынке следуют стохастическим дифференциальным уравнениям. Это приводит к тому, что процесс цены рыночного актива также следует стохастическому дифференциальному уравнению. Такие случайные процессы описываются некоторой объективной вероятностной мерой. Обычно условием отсутствия арбитража является предположение о существовании эквивалентной мартингальной меры (см. ч. 1, гл. 3). Это условие достаточно общее, но трудно проверяемое, так как вопрос о построении эквивалентной мартингальной (нейтральной к риску) меры в явном аналитическом виде пока еще ждет своего разрешения. Поэтому необходимо получить условия отсутствия арбитража в явной форме, не прибегая к построению эквивалентной мартингальной меры.

Наиболее известны условия отсутствия арбитража для однофакторных моделей временной структуры процентных ставок с непрерывным временем (см. гл. 1). Обычно эти условия получаются для портфеля из двух финансовых инструментов на финансовом рынке, на котором имеется также безрисковый актив. Такое условие заключается в том, что превышение средней доходности рискового актива над безрисковой процентной ставкой на единицу волатильности рискового актива не должно зависеть от срока погашения рискового актива. Известно также распространение условия отсутствия арбитража на рынок с инфляцией (см. Richard, 1978). В таком случае условие формулируется (без доказательства) для портфеля из трех рисковых активов и заключается в том, что превышение средней доходности безрискового актива над номинальной процентной ставкой должно быть линейной комбинацией волатильностей процесса реальной доходности рискового актива, соответствующих стохастическому изменению реальной процентной ставки и ставки инфляции. Коэффициенты этой линейной комбинации не должны зависеть от срока погашения и имеют смысл «рыночных цен риска» из-за стохастического изменения реальной процентной ставки и ставки инфляции.

В настоящей главе в явной форме получены условия отсутствия арбитража на рынке, когда инвесторам для составления портфелей ЦБ доступны бескупонные облигации n различных сроков погашения. Предполагается, что инвестор в любой момент времени t имеет возможность составить самофинансирующий портфель стоимостью $S(t)$, включив в него дисконтные облигации со сроками погашения T_j, $1 \leq j \leq n$, на сумму S_j; $S(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j$. Считается, что процессы краткосрочной процентной ставки и ставки инфляции следуют стохастическим дифференциальным уравнениям, а цены облигаций выражаются детерминированными функциями, имеющими производные необходимого порядка.

Рассмотрим торговлю свободными от неуплаты дисконтными облигациями с различными сроками погашения на рынке, который описывается однофакторной моделью. Для исключения арбитражных возможностей портфель, состоящий из любой комбинации облигаций, в каждый момент времени должен зарабатывать тот же доход, что и безрисковый актив такой же стоимости. В этом случае для произвольного количества (больше двух) продаваемых на рынке облигаций удается получить общее условие отсутствия арбитража при определении цен облигаций, которое требует, чтобы превышение ожидаемой доходности облигации над краткосрочной процентной ставкой, деленное на волатильность доходности этой облигации, не зависело от даты погашения облигации.

Чтобы продемонстрировать это математически для каждой даты погашения $T \geq 0$, предположим, что процесс цены $\{P(t, T), t \leq T\}$ свободной от неуплаты дисконтной облигации, погашаемой в момент T, является процессом Ито:

$$dP(t, T) = \mu^T(P(t, T), t)dt + \sigma^T(P(t, T), t)\, dW(t)$$

(индекс T подчеркивает зависимость дрейфа и волатильности от даты погашения облигации T). Разделим это равенство на цену облигации $P(t, T)$:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \frac{\mu^T(P(t, T), t)}{P(t, T)}dt + \frac{\sigma^T(P(t, T), t)}{P(t, T)}dW(t).$$

В полученном равенстве левая часть равна мгновенной ставке доходности облигации. Для простоты используем символы $\mu^T(t)$ и $\sigma^T(t)$ для обозначения соответственно $\frac{\mu^T(P(t, T), t)}{P(t, T)}$ и $\frac{\sigma^T(P(t, T), t)}{P(t, T)}$. Тогда получим

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \mu^T(t)dt + \sigma^T(t)dW(t). \tag{7.1}$$

То есть $\mu^T(t)$ и $\sigma^T(t)$ являются соответственно дрейфом и волатильностью мгновенной ставки доходности облигации.

Теперь рассмотрим случай, когда на рынке торгуют ЦБ с n датами погашения T_j, $j = 1, ..., n$. Пусть инвестор имеет некоторую сумму $S(t)$, которую он может потратить на покупку ценных бумаг на этом рынке, и тратит сумму $S_j = N_jP(t, T_j)$ на покупку N_j ЦБ с датой погашения T_j, так что

$$S(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n} N_jP(t, T_j).$$

Приращение стоимости портфеля этих ЦБ за инфинитезимальный интервал времени определяется равенством

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j dP(t, T_j) = \sum_{j=1}^{n} S_j \frac{dP(t, T_j)}{P(t, T_j)},$$

что с учетом уравнения (7.1) приводит к соотношению

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j [\mu^{(j)}(t)dt + \sigma^{(j)}(t)dW(t)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} S_j \mu^{(j)}(t)dt + \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \sigma^{(j)}(t)\right) dW(t),$$

где $\mu^{(j)}(t)$ и $\sigma^{(j)}(t)$ являются дрейфом и волатильностью доходности ЦБ с датой погашения T_j, $j = 1, ..., n$. Для получения безрискового дохода необходимо, чтобы сумма в скобках в стохастическом слагаемом была равна нулю. То есть для получения безрисковой прибыли нужно таким образом распределять имеющуюся сумму $S(t)$, чтобы выполнялось равенство $\sum_{j=1}^{n} S_j \sigma^{(j)}(t) = 0$.

Не нарушая общности, предположим, что $\sigma^{(n)}(t) \neq 0$, так что

$$S_n = -\frac{1}{\sigma^{(n)}(t)} \sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t).$$

Такой выбор S_n обеспечивает на временном интервале $(t, t + dt)$ безрисковое получение прибыли, равное

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n-1} S_j \mu^{(j)}(t)dt - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t) =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(\mu^{(j)}(t) - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t)\right)\right] dt.$$

При отсутствии арбитража безрисковый портфель должен зарабатывать проценты согласно краткосрочной ставке $r = r(t)$. Это значит, что на рынке будут отсутствовать условия арбитража только тогда, когда, каким бы ни выбирал инвестор распределение $\{S_j\}$ своих денег по типам приобретаемых ЦБ для получения безрисковой прибыли, приращение суммы $S(t)$ будет в точности равным приращению безрискового актива такой же стоимости, т. е. должно выполняться равенство

$$dS(t) = S(t)r(t)dt = \sum_{j=1}^{n} S_j r(t)dt = \sum_{j=1}^{n-1} S_j r(t)dt - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t)dt =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(r(t) - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) \right)\right] dt. \qquad (7.2)$$

Приравнивая полученные формулы для безрискового приращения стоимости $S(t)$, приходим к равенству

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(\mu^{(j)}(t) - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) \right)\right] dt = \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(r(t) - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) \right)\right] dt,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(\mu^{(j)}(t) - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) - r(t) + \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t) \left(\frac{\mu^{(j)}(t) - r(t)}{\sigma^{(j)}(t)} - \frac{\mu^{(n)}(t) - r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любого распределения $\{S_j,\ 1 \le j \le n\}$ имеющейся суммы $S\{t\}$ по типам ЦБ, то каждое слагаемое этой суммы должно быть равно нулю. Отсюда приходим к следующему условию отсутствия безрискового арбитража:

$$\frac{\mu^{(j)}(t) - r(t)}{\sigma^{(j)}(t)} = \frac{\mu^{(n)}(t) - r(t)}{\sigma^{(n)}(t)}, \quad 1 \le j \le n - 1.$$

Таким образом, отношение превышения средней доходности $\mu^{(j)}(t)$ ЦБ с датой погашения T_j над краткосрочной процентной ставкой $r(t)$ к волатильности $\sigma^{(j)}(t)$ процесса изменения доходности этой ЦБ при отсутствии безрискового арбитража не должно зависеть от даты погашения и должно быть одинаковым для всех дат погашения. Обозначим эту функцию через $\lambda(r, t)$ и получим для любых $T \geq t$ равенство

$$\frac{\mu^T(t) - r(t)}{\sigma^T(t)} = \lambda(r(t), t),$$

которое рассматривается как определение функции $\lambda(r, t)$, называемой *рыночной ценой риска* (*market price of risk*) или премией за рыночный риск (*market risk premium*). Это означает, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.1. При отсутствии арбитражных возможностей существует функция $\lambda(r, t)$ такая, что имеет место равенство

$$\mu^T(t) = r(t) + \lambda(r(t), t)\sigma^T(t)$$

для любых дат погашения T.

Это равенство называется (*локальным*) *условием отсутствия арбитража* (*local no arbitrage condition*).

§ 2. УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА НА РЫНКЕ С ИНФЛЯЦИЕЙ

При наличии инфляции номинальная процентная ставка $R(t)$, используемая для получения дисконтированной цены облигации, определяется не только реальной процентной ставкой $r(t)$, но и ставкой инфляции $i(t)$, которая отражает относительное изменение индекса цен потребительских товаров и услуг. Обычно связь между этими ставками описывается так называемым уравнением Фишера:

$$1 + R(t) = [1 + r(t)][1 + i(t)][1 + g(t)], \tag{7.3}$$

где $g(t)$ обозначает «ставку рисковой премии».

Для безрисковой торговли $g(t) = 0$. Кроме того, обычно на рынках устойчивой экономики значения $r(t)$ и $i(t)$ достаточно малы, и можно использовать линейную аппроксимацию этой формулы (Bodie et al., 1996):

$$R(t) \approx r(t) + i(t),$$

которой мы и будем пользоваться.

Будем считать, что процесс реальной процентной ставки $r(t)$ следует стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr(t) = \mu_r(r(t), t)dt + \sigma_r(r(t), t)dW_r(t). \qquad (7.4)$$

Аналогично полагаем, что процесс ставки инфляции $i(t)$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$di(t) = \mu_i(i(t), t)dt + \sigma_i(i(t), t)dW_i(t). \qquad (7.5)$$

Нижние индексы в этих уравнениях показывают, какой процесс характеризуют соответствующие функции дрейфа и волатильности, а также винеровские процессы. Поскольку механизмы, лежащие в основе стохастического изменения процессов $r(t)$ и $i(t)$, в общем случае различные и в определенной степени независимые, то процессы $W_r(t)$ и $W_i(t)$ также являются различными и могут быть зависимыми только в некоторой степени. Поэтому в общем случае винеровские процессы $W_r(t)$ и $W_i(t)$ можно представить в виде

$$W_r(t) = \rho W_0(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, W_1(t), \quad W_i(t) = \rho W_0(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, W_2(t),$$

где $W_0(t)$, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, а ρ представляет собой коэффициент корреляции между процессами $W_r(t)$ и $W_i(t)$.

Для простоты предположим, что $\rho = 0$. Результат в более общем случае, когда $\rho \neq 0$, может быть получен как частный случай из результатов § 4 данной главы.

Поскольку в рассматриваемом случае цена дисконтированной облигации определяется номинальной процентной ставкой, то для даты погашения T она описывается функцией $P(r, i, t, T)$, для которой уравнение (7.1) (в предположении, что $P(r, i, t, T)$ является дифференцируемой по t и дважды дифференцируемой по r и i) путем применения формулы дифференцирования Ито преобразовывается к виду

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \mu^T(t)dt + \sigma_r^T(t)dW_1(t) + \sigma_i^T(t)dW_2(t), \qquad (7.6)$$

где для краткости опущены аргументы r и i у функций μ и σ, которые определяются по формулам

$$\sigma_r^T(t) = \sigma_r(r, t)\frac{1}{P(r, i, t, T)}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \sigma_i^T(t) = \sigma_i(i, t)\frac{1}{P(r, i, t, T)}\frac{\partial P}{\partial i},$$

$$\mu^T(t) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r(r,\, t)\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_i(i,\, t)\frac{\partial P}{\partial i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sigma_r(r,\, t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_i(i,\, t)\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\right). \qquad (7.7)$$

Реальная цена облигации $B(r, i, t, T)$ может быть определена делением номинальной цены $P(r, i, t, T)$ на уровень потребительских цен $C(t)$, который растет согласно ставке инфляции $i(t)$ (Richard, 1978). Этот рост определяется уравнением

$$dC(t) = i(t)C(t)dt.$$

Таким образом, $B(r, i, t, T) = P(r, i, t, T)/C(t)$. Применяя снова формулу Ито, получим уравнение для процесса реальной цены облигации с датой погашения T в виде

$$\frac{dB(t,\, T)}{B(t,\, T)} = [\mu^T(t) - i(t)]dt + \sigma_r^T(t)dW_r(t) + \sigma_i^T(t)dW_i(t).$$

Теперь снова рассмотрим случай, когда на рынке торгуют ЦБ с n датами погашения T_j, $j = 1, ..., n$, $n > 2$. Пусть инвестор тратит на покупку ЦБ денежную сумму $S(t)$, покупая N_j ЦБ с датой погашения T_j, так что $S_j = N_j P(t, T_j)$, т. е.

$$S(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n} N_j P(t,\, T_j).$$

Приращение стоимости портфеля этих ЦБ за инфинитезимальный интервал времени определяется, как и ранее, равенством

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j dP(t,\, T_j) = \sum_{j=1}^{n} S_j \frac{dP(t,\, T_j)}{P(t,\, T_j)}.$$

Предположим, что процессы цен облигаций с любым сроком погашения порождаются одной и той же краткосрочной процентной ставкой, следующей процессу (7.4). Тогда с учетом уравнения (7.6) можно получить соотношение

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j [\mu^{(j)}(t)dt + \sigma_r^{(j)}(t)dW_r(t) + \sigma_i^{(j)}(t)dW_i(t)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} S_j \mu^{(j)}(t)dt + \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \sigma_r^{(j)}(t) \right) dW_r(t) + \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \sigma_i^{(j)}(t) \right) dW_i(t), \quad (7.8)$$

где $\mu^{(j)}(t)$ и $\sigma^{(j)}(t)$ являются дрейфом и волатильностью доходности ЦБ с датой погашения T_j, $j = 1, ..., n$.

Для получения безрискового дохода необходимо, чтобы сумма в скобках в стохастических слагаемых была равна нулю. Это значит, что для получения безрисковой прибыли нужно таким образом распределять имеющуюся сумму $S(t)$, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{j=1}^{n} S_j \sigma_r^{(j)}(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} S_j \sigma_i^{(j)}(t) = 0. \quad (7.9)$$

Обозначим через $\sigma(t)$ $(2\times n)$-матрицу:

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_r^{(1)}(t) & \sigma_r^{(2)}(t) & ... & \sigma_r^{(n)}(t) \\ \sigma_i^{(1)}(t) & \sigma_i^{(2)}(t) & ... & \sigma_i^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что ранг матрицы $\sigma(t)$ равен 2, поскольку в противном случае строки этой матрицы являются линейно зависимыми, отличаясь только на множитель, не зависящий от даты погашения, и равенства (7.9) превращаются в единственное равенство. В таком случае с математической точки зрения рассматриваемая проблема превращается в задачу предыдущего параграфа.

Из равенств (7.9) следует, что среди инвестиций $\{S_j, 1 \le j \le n\}$ независимо могут быть установлены только $n - 2$, а две из них должны определяться из (7.9). Предположим для определенности, что этими двумя являются S_{n-1} и S_n. Тогда, разрешая равенства (7.9) относительно этих величин, будем иметь

$$S_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\sigma_r^{(n)}\sigma_i^{(j)} - \sigma_i^{(n)}\sigma_r^{(j)}}{\sigma_r^{(n-1)}\sigma_i^{(n)} - \sigma_i^{(n-1)}\sigma_r^{(n)}} S_j = -\sum_{j=1}^{n-2} \frac{D(j, n)}{D(n-1, n)} S_j, \quad (7.10)$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\sigma_i^{(n-1)}\sigma_r^{(j)} - \sigma_r^{(n-1)}\sigma_i^{(j)}}{\sigma_r^{(n-1)}\sigma_i^{(n)} - \sigma_i^{(n-1)}\sigma_r^{(n)}} S_j = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{D(j, n-1)}{D(n-1, n)} S_j. \quad (7.11)$$

Для краткости записи в равенствах (7.10) и (7.11) через $D(j, k)$ обозначен определитель, составленный из двух столбцов матрицы $\sigma(t)$

с номерами j и k. При получении этих равенств неявно предположено, что два последних столбца матрицы $\sigma(t)$ являются линейно независимыми. В равенствах (7.10) и (7.11) и ниже аргумент у $\sigma^{(j)}(t)$ и $\mu^{(j)}(t)$ для краткости опускается. Таким образом, определяя инвестиции согласно соотношениям (7.9), (7.10) и (7.11), можно достичь безрискового получения дохода. Для того чтобы при этом отсутствовал арбитраж, необходимо, чтобы безрисковый портфель зарабатывал проценты согласно номинальной процентной ставке $R = R(t)$. То есть должно выполняться равенство

$$dS(t) = S(t)R(t)dt = \sum_{j=1}^{n} S_j R(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2}\left(1 - \frac{D(j,\, n)}{D(n-1,\, n)} + \frac{D(j,\, n-1)}{D(n-1,\, n)}\right)R(t)S_j\, dt. \qquad (7.12)$$

Вместе с тем, согласно уравнению (7.8), проценты безрискового портфеля за инфинитезимальный интервал определяются равенством

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j\, \mu^{(j)}(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2}\left(\mu^{(j)} - \frac{D(j,\, n)}{D(n-1,\, n)}\mu^{(n-1)} + \frac{D(j,\, n-1)}{D(n-1,\, n)}\mu^{(n)}\right)S_j\, dt. \qquad (7.13)$$

Приравнивая (7.12) и (7.13), получаем условие отсутствия арбитража в виде

$$\sum_{j=1}^{n-2}[(\mu^{(j)} - R)D(n-1,\, n) - (\mu^{(n-1)} - R)D(j,\, n) +$$

$$+ (\mu^{(n)} - R)D(j,\, n-1)]S_j = 0. \qquad (7.14)$$

Поскольку $\{S_j,\ 1 \le j \le n-2\}$ являются независимыми, то коэффициенты перед величинами S_j в сумме (7.14) должны быть равны нулю для всех j, т. е.

$$(\mu^{(j)} - R)D(n-1,\, n) - (\mu^{(n-1)} - R)D(j,\, n) + (\mu^{(n)} - R)D(j,\, n-1) = 0.$$

Это равенство можно записать в несколько иной форме:

$$\det\begin{pmatrix} \mu^{(j)} - R & \mu^{(n-1)} - R & \mu^{(n)} - R \\ \sigma_r^{(j)} & \sigma_r^{(n-1)} & \sigma_r^{(n)} \\ \sigma_i^{(j)} & \sigma_i^{(n-1)} & \sigma_i^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \le j \le n-2. \qquad (7.15)$$

Заметим, что равенства (7.10) и (7.11) были получены для S_{n-1} и S_n только из-за соображений удобства записи. Такие соотношения могут быть получены для любой пары S_j и S_k, для которой $D(j, k) \neq 0$. С учетом этого и поскольку матрица $\sigma(t)$ по предположению имеет ранг 2, то совокупность равенств (7.15) эквивалентна утверждению (Horn, Jonson, 1986), что матрица

$$\begin{pmatrix} \mu^{(1)} - R & \mu^{(2)} - R & \dots & \mu^{(n-1)} - R & \mu^{(n)} - R \\ \sigma_r^{(1)} & \sigma_r^{(2)} & \dots & \sigma_r^{(n-1)} & \sigma_r^{(n)} \\ \sigma_i^{(1)} & \sigma_i^{(2)} & \dots & \sigma_i^{(n-1)} & \sigma_i^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (7.16)$$

имеет ранг 2. Это, в свою очередь, эквивалентно утверждению, что первая строка матрицы (7.16) является линейной комбинацией двух остальных, т. е.

$$\mu^{(j)}(t) - R(t) = \lambda_r(t, R)\sigma_r^{(j)}(t) + \lambda_i(t, R)\sigma_i^{(j)}(t), \quad 1 \le j \le n.$$

Коэффициенты $\lambda_r(t, R)$ и $\lambda_i(t, R)$, не зависящие от даты погашения, имеют смысл рыночной цены риска в связи со стохастическим изменением соответственно процентной ставки и инфляции.

§ 3. УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА НА СЕГМЕНТИРОВАННОМ РЫНКЕ

Предыдущие рассуждения согласуются с теорией временной структуры процентных ставок, основанной на так называемой гипотезе ожиданий (*expectations hypothesis*). Согласно этой теории, форвардные процентные ставки рассматриваются как несмещенные оценки ожидаемых будущих значений краткосрочных процентных ставок. Поэтому естественно предположение, что в уравнениях для процессов цен облигаций с любыми сроками погашения можно использовать одно и то же уравнение процесса краткосрочной процентной ставки.

Однако не всегда результаты этой теории согласуются с рыночными реалиями. В связи с этим существуют и другие теории временной структуры (см. § 1, гл. 1). Согласно теории рыночной сегментации (*market segmentation*), параллельно существует несколько независимых процессов краткосрочных процентных ставок, соответствующих различным срокам до погашения и управляемых спросом и предложением для активов с этими сроками. Чаще всего активы, которыми торгуют на рынке, разделяются на три сегмента: краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные активы. Из-за независимости механизмов установления цен на активы внутри каждого из сегментов можно предположить, что стохастические процессы краткосрочных процентных ставок внутри различных сегментов порождаются независимыми винеровскими процессами. Рассмотрим условия отсутствия арбитража в этом случае.

Будем по-прежнему предполагать, что на рассматриваемом финансовом рынке торгуют дисконтными облигациями со сроками погашения, составляющими множество $\{T_j,\ 1 \le j \le n\}$. Предположим также, что эти сроки погашения разделяются на m непересекающихся сегментов T_k, $1 \le k \le m$, $m < n$. В пределах k-го сегмента реальная краткосрочная процентная ставка $r_k(t)$ следует стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr_k(t) = \mu_{kr}[r(t), t]dt + \sigma_{kr}[r(t), t]dW_k(t), \ \ 1 \le k \le m.$$

Согласно этому, цена облигации со сроком погашения $T_j \in \mathrm{T}_k$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dP(t, T_j)}{P(t, T_j)} = \mu^{(j)}(r_k, t)dt + \sigma^{(j)}(r_k, t)dW_k(t). \tag{7.17}$$

При инфляции вместо реальной процентной ставки $r_k(t)$ в уравнении (7.17) необходимо использовать номинальную процентную ставку $R_k(t) = (1 + r_k(t))(1 + i(t)) - 1$, где ставка инфляции изменяется согласно процессу (7.5). В этом случае уравнение (7.17) должно быть модифицировано к виду (7.6) и (7.7), учитывающему стохастическое поведение ставки инфляции. Поскольку цель настоящего параграфа – демонстрация формирования условия отсутствия арбитража для сегментированного рынка, мы не будем учитывать инфляцию.

Как и до сих пор, предположим, что инвестор составляет портфель облигаций стоимостью $S(t)$, приобретая N_j ЦБ со сроком погашения T_j по цене $P(t, T_j)$, так что $S_j = N_j\, P(t, T_j)$:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n} N_j P(t, T_j).$$

Используя технику, которая применялась в предыдущих параграфах, можно получить приращение стоимости этого портфеля облигаций за инфинитезимальный интервал времени в виде

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} I_{kj} \mu^{(j)}(r_k, t) S_j dt + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I_{kj} \sigma^{(j)}(r_k, t) S_j dW_k(t), \quad (7.18)$$

где I_{kj} является индикатором:

$$I_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad T_j \in \mathrm{T}_k, \\ 0, & \text{если} \quad T_j \notin \mathrm{T}_k. \end{cases}$$

Снова для получения безрисковой прибыли необходимо, чтобы $\{S_j\}$ выбирались таким образом, чтобы стохастические слагаемые в равенстве (7.18) обращались в нуль. Поэтому мы имеем m условий безрискового получения процентов:

$$\sum_{j=1}^{n} [I_{kj} \sigma^{(j)}(r_k, t)] S_j = 0, \quad 1 \le k \le m. \quad (7.19)$$

Как и в § 2, удобно ввести в рассмотрение $(m\times n)$-матрицу $\sigma(t)$ с элементами $\sigma_{kj}(t) = I_{kj}\sigma^{(j)}(r_k, t)$. Если все подмножества T_k, $1 \le k \le m$, сроков погашения являются непустыми, то ранг матрицы $\sigma(t)$ будет равен m. Сказанное легко показать, если составить минор этой матрицы, содержащий по одному столбцу, соответствующему сроку погашения из каждого подмножества T_k. Отсюда следует, что среди $\{S_j\}$ имеется m величин, линейно зависимых от остальных $(n - m)$ величин. Можно перенумеровать облигации таким образом, чтобы этими величинами были последние m величин. Для дальнейшего введем следующие обозначения:

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t)\ \sigma_2(t)), \quad \mu(t) = (\mu_1(t)\ \ \mu_2(t)),$$

где $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ – соответственно матричные блоки размеров $m\times(n-m)$ и $m\times m$. Причем $\sigma_2(t)$ – невырожденная матрица.

Пусть также $\mu(t)$ является n-вектор-строкой с элементами $\mu^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{m} I_{kj}\mu^{(j)}(r_k, t)$, $1 \le j \le n$, а $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вектор-столбцы соответственно с размерами $(n-m)$ и m, нумерация элементов которых согласована с нумерацией столбцов в матричных блоках $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Наконец, пусть $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – вектор-столбцы с размерами соответственно $(n-m)$ и m, составленные из величин $\{S_j\}$ таким образом, чтобы нумерация индексов была согласована с нумерацией столбцов в матричных блоках $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$.

В принятых обозначениях равенство (7.19) может быть записано в матричной форме следующим образом:

$$\sigma_1(t)\, S_1(t) + \sigma_2(t)\, S_2(t) = 0,$$

откуда

$$S_2(t) = -\, [\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t)\, S_1(t).$$

Таким образом, проценты безрискового портфеля за инфинитезимальный интервал будут определяться равенством

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu_1(t)\, S_1(t) + \mu_2(t)\, S_2(t)\, dt = \\ &= (\mu_1(t) - \mu_2(t)[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t))\, S_1(t)\, dt. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Для того чтобы арбитраж отсутствовал, должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} I_{kj} r_k(t) S_j\, dt = \sum_{j=1}^{n} r^{(j)}(t) S_j\, dt = [r\,(1)S_1(t) + r\,(2)S_2(t)]dt = \\ &= [r(1) - r(2)[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t)]S_1(t)dt, \end{aligned} \tag{7.21}$$

где использованы следующие обозначения: $r^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{m} I_{kj} r_k(t)$, а $r(1)$ и $r(2)$ – вектор-строки с элементами $r^{(j)}(t)$ и размерами соответственно $(n-m)$ и m, номера компонент которых согласованы с нумерацией столбцов в матричных блоках $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$.

Приравнивая приращения (7.20) и (7.21), получаем условие отсутствия арбитража

$$[\mu_1(t) - \mu_2(t)\,[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t)]S_1(t) = [r(1) - r(2)\,[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t)]S_1(t).$$

Этому условию можно придать более привлекательную форму. Обозначим

$$\tilde{\mu}^{(j)}(t) = \mu^{(j)}(t) - r^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{m}[\mu^{(j)}(r_k, t) - r_k(t)]I_{kj},$$

где $\tilde{\mu}_l(t)$, $l = 1, 2,$ – вектор-строки, отличающиеся от $\mu_l(t)$ только тем, что вместо $\mu^{(j)}(t)$ стоят $\tilde{\mu}^{(j)}(t)$.

Тогда условие отсутствия арбитража записывается в виде

$$\{\tilde{\mu}_1(t) - \tilde{\mu}_2(t)\,[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma_1(t)\}S_1(t) = 0. \qquad (7.22)$$

Поскольку компоненты вектора $S_1(t)$ являются независимыми величинами, то из условия (7.22) следует, что множители перед каждой компонентой S_j вектора $S_1(t)$ должны быть равны нулю, т. е. должно выполняться равенство

$$\tilde{\mu}^{(j)}(t) - \tilde{\mu}_2(t)\,[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma^{(j)}(t) = 0, \qquad (7.23)$$

где $\sigma^{(j)}(t)$ – столбец матрицы $\sigma_1(t)$, соответствующий компоненте S_j.

Однако равенство (7.23) эквивалентно требованию, чтобы была вырожденной матрица

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{(j)}(t) & \tilde{\mu}_2(t) \\ \sigma^{(j)}(t) & \sigma_2(t) \end{pmatrix}. \qquad (7.24)$$

Действительно, по предположению $(m\times m)$-матрица $\sigma_2(t)$ является невырожденной. Поэтому имеет место равенство

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{(j)}(t) & \tilde{\mu}_2(t) \\ \sigma^{(j)}(t) & \sigma_2(t) \end{pmatrix} = \{\tilde{\mu}^{(j)}(t) - \tilde{\mu}_2(t)\,[\sigma_2(t)]^{-1}\sigma^{(j)}(t)\} \times \det\sigma_2(t),$$

и для того, чтобы матрица (7.24) была вырожденной, необходимо выполнение равенства (7.23). Это равенство должно выполняться для индексов j, соответствующих всем компонентам S_j вектора $S_1(t)$ и для всех разбиений величин $\{S_j\}$ на векторы $S_1(t)$ и $S_2(t)$, для которых существует невырожденная матрица $\sigma_2(t)$. Это эквивалентно следующему утверждению: если ранг матрицы $\sigma(t)$ равен m, условием отсутствия арбитража является вырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{(1)}(t) & \tilde{\mu}^{(2)}(t) & \ldots & \tilde{\mu}^{(n-1)}(t) & \tilde{\mu}^{(n)}(t) \\ \sigma^{(1)}(t) & \sigma^{(2)}(t) & \ldots & \sigma^{(n-1)}(t) & \sigma^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\mu}^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{m} [\mu^{(j)}(r_k, t) - r_k(t)] I_{kj}$, $1 \le j \le n$; $\sigma^{(j)}(t)$ – m-вектор-столбец с компонентами $\sigma_{kj}(t) = I_{kj}\sigma^{(j)}(r_k, t)$, $1 \le k \le m$.

Но вырожденность матрицы эквивалентна тому, что первая строка матрицы является линейной комбинацией остальных ее строк. Иначе говоря, имеют место равенства

$$\tilde{\mu}^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{m} [\mu^{(j)}(r_k, t) - r_k(t)] I_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(r_k, t)\sigma^{(j)}(r_k, t) I_{kj}, \quad 1 \le j \le n. \tag{7.25}$$

Поскольку облигация с некоторым конкретным сроком погашения T_j может принадлежать только одному сегменту, то суммы в равенстве (7.25) содержат только по одному ненулевому слагаемому для соответствующего этому сроку погашения номеру $k = k^*$. Отсюда условие отсутствия арбитража получается в виде следующего утверждения.

Утверждение 7.2. На сегментированном рынке арбитраж отсутствует, если для каждой пары (j, k^*) выполняется равенство

$$\frac{\mu^{(j)}(r_{k^*}, t) - r_{k^*}}{\sigma^{(j)}(r_{k^*}, t)} = \lambda_{k^*}(r_{k^*}, t), \qquad 1 \le j \le n, \ 1 \le k^* \le m.$$

Это означает, что для каждого сегмента финансового рынка имеется своя рыночная цена риска, одинаковая для облигаций всех сроков погашения этого сегмента, но в общем случае различная для разных сегментов.

§ 4. УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА ДЛЯ МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

В многофакторных моделях временной структуры процентных ставок предполагается, что номинальная процентная ставка $r(t)$ определяется как некоторая скалярная функция стохастических процессов $r_k(t)$, $1 \le k \le m$, определяемых системой стохастических дифференциальных уравнений относительно m-вектора $\overline{r}(t)$ с компонентами $r_k(t)$:

$$d\overline{r}(t) = \overline{\mu}(\overline{r}, t)\,dt + \overline{\sigma}(\overline{r}, t)\,dW(t), \tag{7.26}$$

где $\overline{\mu}(\overline{r}, t)$ – m-вектор дрейфа с элементами $\mu_k(r_k, t)$; $\overline{\sigma}(\overline{r}, t)$ – $(m\times q)$-матрица волатильностей с элементами $\sigma_{kl}(r_k, t)$, $1 \le k \le m$, $1 \le l \le q$; $W(t)$ – q-мерный случайный процесс, компонентами которого являются скалярные независимые стандартные винеровские процессы $W_l(t)$.

Некоторые авторы предполагают, что $r(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k r_k(t)$. (Когда $m = q = 1$ модель превращается в однофакторную.) В этих условиях стохастическое дифференциальное уравнение для цены $P(r, t, T_j)$ бескупонной облигации со сроком погашения T_j имеет вид

$$\frac{dP(t, T_j)}{P(t, T_j)} = \mu^{(j)}(t)dt + \overline{\sigma}^{(j)}(t)dW(t), \tag{7.27}$$

где использованы упрощенные обозначения $P(t, T_j) \equiv P(r, t, T_j)$,

$$\mu^{(j)}(t) = \frac{1}{P(t,\ T_j)}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\left(r_k, t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_{kl}\left(r_k, t\right)\right)^2\right),$$

$$\overline{\sigma}^{(j)}(t)dW(t) = \sum_{l=1}^{q}\sigma_l^{(j)}(t)dW_l(t), \tag{7.28}$$

$$\sigma_l^{(j)}(t) = \frac{1}{P(t, T_j)}\frac{\partial P}{\partial r}\sum_{k=1}^{m}\sigma_{kl}(r_k, t), \qquad 1 \le l \le q.$$

Снова предположим, что для составления самофинансирующего портфеля стоимостью $S(t)$ инвестору доступны облигации n различных сроков погашения T_j, $1 \le j \le n$. В каждый момент времени он использует сумму S_j на приобретение облигаций со сроком погашения T_j по цене $P(t, T_j)$. Приращение стоимости такого портфеля облигаций за инфинитезимальный интервал времени определяется равенством

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{dP(t, T_j)}{P(t, T_j)} S_j = \sum_{j=1}^{n} [\mu^{(j)}(t)dt + \overline{\sigma}^{(j)}(t)dW(t)]S_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^{(j)}(t) S_j dt + \sum_{l=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_l^{(j)}(t) S_j \right) dW_l(t). \tag{7.29}$$

Для получения безрисковой прибыли необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_l^{(j)}(t) S_j = 0, \quad 1 \le l \le q. \tag{7.30}$$

Введем в рассмотрение $(q \times n)$-матрицу σ с элементами $\sigma_l^{(j)}(t)$, $1 \le l \le q$, $1 \le j \le n$, и n-вектор-столбец S с компонентами S_j. Тогда условия (7.30) могут быть записаны в матричной форме как уравнение $\sigma S = 0$. Это уравнение имеет нетривиальное решение S, если и только если $\operatorname{rank} \sigma < n$.

Таким образом, неравенство $\operatorname{rank} \sigma < n$ является необходимым и достаточным условием существования безрискового самофинансируемого портфеля облигаций со сроками погашения T_j, $1 \le j \le n$. Матрицу σ можно интерпретировать как матрицу волатильностей доходностей облигаций, из которых составляется портфель.

Пусть $\operatorname{rank} \sigma = \rho < n$. Отсюда также следует, что $\rho \le q$. В таком случае при помощи подходящей нумерации облигаций можно представить матрицу σ и вектор S в согласованной блочной форме

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix},$$

где σ_{11} является невырожденной $(\rho \times \rho)$-матрицей. Тогда система уравнений $\sigma S = 0$ может быть переписана в виде

$$\sigma_{11} S_1 + \sigma_{12} S_2 = 0, \quad \sigma_{21} S_1 + \sigma_{22} S_2 = 0. \tag{7.31}$$

Из первого равенства (7.31) следует, что компоненты вектора S_1 могут быть выражены через компоненты вектора S_2:

$$S_1 = -(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12} S_2. \tag{7.32}$$

Второе равенство (7.31) является зависимым от первого и будет выполняться для всех S_1 и S_2, удовлетворяющих первому равенству (7.31). Поэтому равенство (7.32) эквивалентно условию существования безрискового самофинансирующего портфеля. Наконец, введем n-вектор-строку μ, составленную из элементов $\mu^{(j)}(t)$, $1 \le j \le n$, упорядоченных точно так же, как и компоненты вектора S, и его расчленение на две части (μ_1, μ_2), согласованное с разбиением вектора S на S_1 и S_2. Тогда для пары (S_1, S_2), удовлетворяющей соотношению (7.32), согласно соотношению (7.29), приращение стоимости самофинансируемого портфеля за инфинитезимальный временной интервал может быть представлено в виде

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(j)}(t) S_j dt = (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)dt =$$

$$= (\mu_2 - \mu_1(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}) S_2\, dt. \tag{7.33}$$

При отсутствии арбитража это приращение должно быть таким же, как и приращение актива стоимости $S(t)$ согласно безрисковой ставке $r(t)$. Поэтому должно выполняться равенство

$$dS(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(j)}(t) S_j dt = r(t)S(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} r(t) S_j dt.$$

Иначе говоря, условие отсутствия арбитража сводится к следующему равенству:

$$\sum_{j=1}^{n} [\mu^{(j)}(t) - r(t)] S_j = 0. \tag{7.34}$$

Пусть r_1 и r_2 обозначают вектор-строки размерности соответственно ρ и $(n - \rho)$, все компоненты которых одинаковы и равны $r(t)$. Тогда из соотношения (7.33) следует, что равенство (7.34) может быть записано в виде

$$(\mu_2 - r_2 - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12})\, S_2 = 0. \tag{7.35}$$

Поскольку равенство (7.35) должно быть для любого вектора S_2, то каждый элемент вектор-строки $(\mu_2 - r_2 - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12})$ должен быть равен нулю. Этот факт эквивалентен тому, что для каждого j, соответствующего компоненте S_j вектора S_2, имеет место равенство

$$\det\begin{pmatrix} \mu^{(j)}(t) - r(t) & \mu_1 - r_1 \\ \sigma_{12}^{(j)} & \sigma_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu^{(j)}(t) - r(t) - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}^{(j)}) \times \det \sigma_{11} = 0, \qquad (7.36)$$

где $\sigma_{12}^{(j)}$ обозначает столбец матрицы σ_{12} с номером j.

Поскольку (7.36) справедливо для всех возможных индексов j и всех возможных способов составления матрицы σ_{11}, значит, условие отсутствия арбитража выполняется, если матрица

$$\begin{pmatrix} \mu^{(1)}(t) - r(t) & \mu^{(2)}(t) - r(t) & \ldots & \mu^{(n-1)}(t) - r(t) & \mu^{(n)}(t) - r(t) \\ \sigma_1^{(1)}(t) & \sigma_1^{(2)}(t) & \ldots & \sigma_1^{(n-1)}(t) & \sigma_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_\rho^{(1)}(t) & \sigma_\rho^{(2)}(t) & \ldots & \sigma_\rho^{(n-1)}(t) & \sigma_\rho^{(n)}(t) \end{pmatrix} \qquad (7.37)$$

имеет ранг ρ. Но это, в свою очередь, эквивалентно тому, что первая строка матрицы (7.37) является линейной комбинацией остальных ρ строк, позволяющей сформулировать условие отсутствия арбитража следующим образом.

Утверждение 7.3. Для того чтобы на финансовом рынке, описываемом многофакторной моделью (7.26), (7.27), отсутствовали арбитражные возможности, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\mu^{(j)}(t) - r(t) = \sum_{l=1}^{\rho} \lambda_l(r, t)\sigma_l^{(j)}(t). \qquad (7.38)$$

Величины $\lambda_l(r, t)$, $1 \le l \le \rho$, в выражении (7.38) имеют смысл рыночной цены риска из-за случайного поведения l-й независимой составляющей стохастической доли приращения доходности в уравнении (7.27).

Подстановка в равенство (7.38) выражений для $\mu^{(j)}(t)$ и $\sigma_l^{(j)}(t)$, определяемых соотношениями (7.28), дает после соответствующих преобразований основное уравнение в частных производных относительно цены $P(r, t, T_j)$.

Следует заметить, что часто рассматривается случай, когда цены облигаций зависят от факторов через единственную переменную. Этой переменной обычно является номинальная процентная ставка. Фактически пример такого случая был рассмотрен ранее в § 2 данной главы. Для этого случая можно принять, что номинальная процентная ставка $R(t)$ определяется факторами $r_k(t)$, $1 \le k \le m$, как взвешенная сумма $R(t) = a\bar{r}(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k r_k(t)$. Тогда цена дисконтной облигации, определяемая для даты погашения T, описывается функцией $P(R, t, T)$. В то же время рассматриваемый случай является частным случаем многофакторной модели, и полученный выше результат здесь тоже имеет место. Поэтому уравнение (7.27) будет справедливо, но выражения (7.28) должны быть уточнены:

$$\mu^{(j)}(t) = \frac{1}{P_j}\left(\frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial R} a\bar{\mu}(\bar{r}, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_j}{\partial R^2} a\bar{\sigma}(\bar{r}, t)[a\bar{\sigma}(\bar{r}, t)]^{\mathrm{T}}\right), \quad (7.39)$$

$$\sigma^{(j)}(t) = \frac{1}{P_j}\frac{\partial P_j}{\partial R} a\sigma(\bar{r}, t),$$

где $a = (a_1\, a_2\, \dots\, a_m)$ является вектором, $P_j = P(R, t, T_j)$, а (математические) производные $\frac{\partial P_j}{\partial R}$ и $\frac{\partial^2 P_j}{\partial R^2}$ являются скалярными величинами. Тогда выражение (7.38) может быть записано в виде

$$\frac{\mu^{(j)}(t) - R(t)}{\frac{1}{P_j}\frac{\partial P_j}{\partial R}} = a\bar{\sigma}(\bar{r}, t)\lambda(\bar{r}, t), \quad 1 \le j \le n. \quad (7.40)$$

Здесь $\lambda(\bar{r}, t) = (\lambda_1(\bar{r}, t)\;\; \lambda_2(\bar{r}, t)\;\; \dots\;\; \lambda_q(\bar{r}, t))^{\mathrm{T}}$ является вектор-столбцом рыночных цен риска из-за наличия стохастического слагаемого $\bar{\sigma}(\bar{r}, t)\,dW(t)$ приращения факторов в уравнении (7.26). Заметим, что $\frac{1}{P_j}\frac{\partial P_j}{\partial R} = \frac{\partial \ln P_j}{\partial R}$. Таким образом, мы получаем следующую интерпретацию соотношения (7.38).

Утверждение 7.4. Условие отсутствия арбитража при определении цены облигации устанавливает, что превышение ожидаемой доходности облигации $\mu^{(j)}(t)$ над номинальной процентной ставкой $R(t)$, поделенное на (математическую) производную логарифма цены облигации P_j по номинальной процентной ставке $R(t)$, не зависит от даты погашения облигации T_j.

Соотношение (7.40) является базовым при составлении основного уравнения в частных производных для определения цены $P(R, t, T_j)$. Для этого достаточно подставить явную форму $\mu^{(j)}(t)$ из (7.39) и в полученном выражении переставить слагаемые. Однако следует заметить, что цена облигации будет иметь вид $P(R, t, T)$, если только выражения $[a\overline{\mu}(\overline{r}, t)]$, $[a\overline{\sigma}(\overline{r}, t)(a\overline{\sigma}(\overline{r}, t))^{\mathrm{T}}]$ и $[a\overline{\sigma}(\overline{r}, t)\,\lambda(\overline{r}, t)]$ являются функциями $R(t) = a\overline{r}(t)$. Это будет, например, если $\overline{\mu}(\overline{r}, t)$, $\overline{\sigma}(\overline{r}, t)$, $\lambda(\overline{r}, t)$ определяются следующим образом:

a – вектор-строка с компонентами $a_k = 1$, $1 \le k \le m$;

$\overline{\mu}(\overline{r}, t)$ – вектор с компонентами $(\alpha r_k(t) + \beta_k)$, $1 \le k \le m$;

$\overline{\sigma}(\overline{r}, t)$ – диагональная $(m\times m)$-матрица с элементами $\sigma\sqrt{r_k(t)+\delta_k}$ для $1 \le k \le m = q$;

$\lambda(\overline{r}, t)$ – вектор с компонентами $\lambda\sqrt{r_k(t)+\delta_k}$, $1 \le k \le q = m$.

Для таких функций решение $P(R, t, T)$ уравнения для цены облигации принадлежит к аффинному классу. Заметим, что обычно на рынках устойчивой экономики значения краткосрочной ставки $r(t)$ и ставки инфляции $i(t)$ достаточно малы и можно использовать линейную аппроксимацию формулы (7.3) (Bodie et al., 1996):

$$R(t) \approx r(t) + i(t).$$

В этом случае $m = 2$, $r_1(t) = r(t)$, $r_2(t) = i(t)$.

Вопрос, существуют ли другие возможные способы определения этих функций, чтобы гарантировать решение уравнения для цены облигации в виде $P(R, t, T)$, остается открытым.

ГЛАВА 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН АКТИВОВ, КОГДА ПРОЦЕССЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК ЯВЛЯЮТСЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим задачу определения цены финансового актива, когда процесс краткосрочной процентной ставки не имеет марковского свойства. В этом случае цена может определяться также переменными состояния, из них некоторые не являются наблюдаемыми. В то же время с практической точки зрения математическое выражение для цены актива приемлемо для участников рынка, если оно включает только наблюдаемые переменные. Поэтому должна быть разработана процедура исключения из этого математического выражения всех ненаблюдаемых составляющих вектора переменных состояния. В стохастических задачах принято исключать ненаблюдаемые показатели путем вычисления условных математических ожиданий. В этой главе используется именно такой подход. Предположим, что процесс процентных ставок дифференцируемый, но его математическая производная некоторого порядка – диффузионный процесс. Значения такого процесса в будущие моменты времени зависят от значений процесса и его производных в настоящее время. Следовательно, имеется зависимость от траектории процесса, и возникает проблема определения цены актива в этих условиях. Оказывается, что в таком случае достаточно к обычной формуле для цены актива добавить некоторый множитель, зависящий от стохастических свойств математических производных процесса процентной ставки. На этой основе можно расширить известные модели (например, модель Васичека) на дифференцируемые процессы.

В многофакторной модели предполагается, что состояние среды, от которого зависит цена актива P, определяется несколькими величинами, как правило, совокупностью различных котируемых рыночных индексов и связанных с ними ненаблюдаемых переменных. Обозначим вектор-столбец, составленный из таких величин, через $R \in \mathbf{R}^M$, где $1 \le m \le M$, причем M – полное число рыночных переменных, от которого зависит цена актива, а m – число из этих переменных, которые котируются (наблюдаются) на рынке. В однофакторных моделях временной структуры процентных ставок $M = m = 1$, т. е. вектор R вырождается в единственную переменную, и этой единственной переменной состояния является краткосрочная процентная ставка.

С практической точки зрения математическое выражение для цены актива приемлемо для участников рынка, если оно включает только наблюдаемые переменные. Поэтому должна быть разработана процедура исключения из этого математического выражения всех ненаблюдаемых компонент вектора переменных состояния.

Нечто подобное имеет место и в однофакторной модели временной структуры процентных ставок. Цена дисконтируемой облигации с датой погашения T в момент времени t, строго говоря, определяется как ее номинальная стоимость, дисконтированная (в отрегулированной к риску среде) к моменту t, т. е. по интервалу времени $[t, T]$. Однако в момент t известно только значение краткосрочной процентной ставки $r(t) = r$ и неизвестны ее значения в будущие моменты времени, вплоть до момента T. Получающаяся в этих условиях формула для цены облигации, приемлемая для участников рынка, является просто условным математическим ожиданием (по отрегулированной риском вероятностной мере) дисконтированной номинальной стоимости по ненаблюдаемым будущим значениям краткосрочной процентной ставки $\{r(s), t < s \le T\}$ при условии $r(t) = r$. При использовании объективной вероятностной меры, вообще говоря, происходит то же самое, только дисконтированию подвергается стоимость, взвешенная во времени коэффициентом, зависящим от рыночной цены риска (см. Vasiček, 1977; Artzner, Delbaen, 1989). Таким образом, фактически исключение из математического выражения значений ненаблюдаемых переменных происходит путем усреднения дисконтированной номинальной стоимости облигации по этим ненаблюдаемым переменным. Такая процедура может быть принята и в многофакторной модели определения цены финансового актива. Тогда ненаблюдаемыми переменными будут не только будущие значения всех M переменных состояния, но и настоящие значения тех $(M - m)$ переменных состояния, которые не наблюдаются и в момент времени t. Такая процедура фактически является проектированием функции цены, заданной в «полном» пространстве переменных состояния на подпространство наблюдаемых переменных состояния. А оператором такого проектирования при однофакторной модели становится вычисление условного математического ожидания. В этом смысле в дальнейшем будем называть *полной ценой актива* математическое выражение для цены актива, заданное в «полном» пространстве переменных состояния, а *ценой актива* – ее проекцию на подпространство наблюдаемых переменных состояния.

Предположим, что вектор R изменяется во времени согласно следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dR = \mu(R, t)dt + \sigma(R, t)dW(t), \tag{8.1}$$

где $\mu(R, t)$ – M-вектор функции дрейфа переменных состояния; $\sigma(R, t)$ – $(M\times q)$-матрица их волатильности; $dW(t)$ – вектор приращений q-мерного стандартного винеровского процесса с взаимно независимыми компонентами.

Предположим далее, что полная цена актива может быть представлена как детерминированная функция от R, t и T, дифференцируемая по всем своим переменным необходимое число раз. Здесь и далее предположим, что по активу не выплачивается никаких промежуточных платежей, а все выплаты делаются в дату погашения T. Тогда функция полной цены актива $P(R, t, T) \equiv P^{(T)}$, согласно формуле Ито, будет изменяться во времени как процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dP^{(T)} = P^{(T)}\mu^{(T)}(t)dt + P^{(T)}\sigma^{(T)}(t)dW(t), \tag{8.2}$$

в котором скалярный коэффициент дрейфа $\mu^{(T)}(t)$ и q-вектор-строка волатильности $\sigma^{(T)}(t)$ являются краткими обозначениями следующих выражений (верхний индекс в скобках означает, что $\mu^{(T)}$и $\sigma^{(T)}$ характеризуют актив с датой погашения T, верхний индекс T без скобок означает транспонирование):

$$\mu^{(T)}(t) = \frac{1}{P^{(T)}}\left(\frac{\partial P^{(T)}}{\partial t} + \frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\mu(R, t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R^2}\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t)\right)\right),$$

$$\sigma^{(T)}(t) = \frac{1}{P^{(T)}}\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\sigma(R, t). \tag{8.3}$$

Для определенности заметим, что здесь $\dfrac{\partial P^{(T)}}{\partial R}$ является M-вектор-строкой, а $\dfrac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R^2}$ – ($M\times M$)-матрицей; tr A – след матрицы A.

§ 2. УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА ДЛЯ МНОГОФАКТОРНОЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В арбитражной теории определения цены активов обычным способом получения уравнения для определения цены является требование отсутствия арбитража на рынке, где торгуют конечным набором N ЦБ, различающихся только датами погашения T_j, $1 \le j \le N$. Собственно условие отсутствия арбитража и является уравнением в частных производных для полной цены актива. В дальнейшем для краткости вместо $P^{(T_j)}$, $\mu^{(T_j)}$, $\sigma^{(T_j)}$ будем писать соответственно $P^{(j)}$, $\mu^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$, $1 \le j \le N$.

Для получения условия осутствия арбитража сначала нужно составить безрисковый портфель активов, а затем потребовать, чтобы доходность такого портфеля в точности равнялась безрисковой процентной ставке.

Предположим, что некоторый инвестор составил портфель ЦБ, инвестируя в момент времени t в актив с датой погашения T_j сумму величиной $V_j(t)$ (предполагается, что $V_j(t) > 0$, если инвестор приобретает актив, по которому он в дату T_j получит соответствующую сумму, и $V_j(t) < 0$, если инвестор выпускает актив, т. е. в дату T_j обязуется выплатить по этому активу полагающуюся сумму). Тогда стоимость этого портфеля в момент времени t

$$v = \sum_{j=1}^{N} V_j(t) = \sum_{j=1}^{N} N_j(t) P(R,\, t,\, T_j) = \sum_{j=1}^{N} N_j(t) P^{(j)},$$

где N_j обозначает количество ЦБ с датой погашения T_j, содержащихся в портфеле в момент времени t. Приращение стоимости такого портфеля за интервал $(t,\, t + dt)$ составит величину

$$dv = \sum_{j=1}^{N} N_j(t)\, dP^{(j)} = \sum_{j=1}^{N} V_j(t) \frac{dP^{(j)}}{P^{(j)}}.$$

Используя уравнение (8.2), определяющее приращение цены актива с датой погашения T_j, получаем стохастическое дифференциальное уравнение для стоимости портфеля в виде

$$dv = \sum_{j=1}^{N} V_j(t) \frac{dP^{(j)}}{P^{(j)}} = \sum_{j=1}^{N} V_j(t) \mu^{(j)}(t) dt + \sum_{j=1}^{N} V_j(t) \sigma^{(j)}(t) dW(t). \qquad (8.4)$$

Такой портфель будет безрисковым, если стохастическая составляющая в этом уравнении будет равна нулю, т. е. $\sum_{j=1}^{N} V_j(t) \sigma^{(j)}(t) = 0.$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести N-вектор-строку $V(t)$ с компонентами $V_j(t)$, $1 \le j \le N$; $(N \times M)$-матрицу $\partial P / \partial R$ с элементами $\left(\partial P / \partial R\right)_{jk} = \partial \ln P^{(j)} / \partial R_k$, $1 \le j \le N$, $1 \le k \le M$; $(N \times q)$-матрицу $\sigma(t) = (\partial P / \partial R)\, \sigma(R, t)$ со строками $\sigma^{(j)}(t)$, $1 \le j \le N$, определяемыми соотношением (8.3). Тогда условием того, что портфель будет безрисковым, является равенство $V(t)\sigma(t) = 0$. Оно может рассматриваться как уравнение, определяющее вектор $V(t)$ инвестиций в безрисковый портфель. Отсюда видно, что необходимым условием существования безрискового портфеля является неравенство

$$\operatorname{rank} \sigma(t) = \min\{\operatorname{rank}(\partial P / \partial R),\ \operatorname{rank} \sigma(R, t)\} = \rho < N.$$

(Мы, конечно, не рассматриваем вариант, когда вектор инвестиций является нулевым.) Итак, пусть необходимое условие существования безрискового портфеля $\rho < N$ имеет место. Представим матрицу $\sigma(t)$ в блочной форме (в случае, когда $\rho < q$)

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \qquad (8.5)$$

где σ_{11} представляет собой невырожденный блок размером $(\rho \times \rho)$. Этого в наших условиях всегда можно достичь перенумерацией активов.

Соответственно этому представлению запишем в блочной форме вектор инвестиций в портфель $V(t) = (V_1\ V_2)$. Тогда *условие существования безрискового портфеля* $V(t)\sigma(t) = 0$ приобретает вид

$$V_1 \sigma_{11} + V_2 \sigma_{21} = 0, \qquad V_1 \sigma_{12} + V_2 \sigma_{22} = 0. \qquad (8.6)$$

Отсюда следует, что между V_1 и V_2 должна существовать линейная зависимость

$$V_1 = -V_2\sigma_{21}(\sigma_{11})^{-1}, \tag{8.7}$$

а вектор V_2 удовлетворяет уравнению

$$V_2(\sigma_{22} - \sigma_{21}(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}) = 0, \tag{8.8}$$

которое имеет семейство ненулевых решений ввиду вырожденности матрицы $(\sigma_{22} - \sigma_{21}(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12})$.

Таким образом, многообразие безрисковых портфелей определяется многообразием решений V_2 уравнения (8.8), однозначно определяющего V_1 по формуле (8.7), а значит, и весь вектор $V(t)$. В случае, когда $\rho = q$, в матрице (8.5) блоки σ_{12} и σ_{22} отсутствуют, второе уравнение в (8.6) и уравнение (8.8) также отсутствуют, а в качестве V_2 может быть выбран любой ненулевой $(N - \rho)$-вектор.

При отсутствия арбитража требуется, чтобы доходность любого безрискового портфеля в точности равнялась безрисковой процентной ставке, значение которой в момент времени t будем обозначать символом $r(t)$. Как правило, безрисковая процентная ставка является одной из компонент вектора переменных состояния $R(t)$.

Из соотношений (8.4) и (8.6) следует, что уравнение динамики стоимости безрискового портфеля имеет вид

$$dv = \sum_{j=1}^{N} V_j(t)\mu^{(j)}(t)dt = (V_1\mu_1 + V_2\mu_2)dt = V_2(\mu_2 - \mu_1(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12})dt. \tag{8.9}$$

Для краткости записи снова использована блочная структура вектора $\mu(t)^{\mathrm{T}} = (\mu^{(1)}(t)\ \mu^{(2)}(t)\ \ldots\ \mu^{(N)}(t)) = (\mu_1^{\mathrm{T}}\ \mu_2^{\mathrm{T}})$. Для того чтобы отсутствовал арбитраж, должно выполняться условие

$$dv = \sum_{j=1}^{N} V_j(t)\mu^{(j)}(t)dt = v(t)\, r(t)dt = \sum_{j=1}^{N} V_j(t)\, r(t)\, dt. \tag{8.10}$$

Если ввести вектор-столбцы r_1 и r_2 с одинаковыми компонентами $r(t)$ в каждом, с размерностями соответственно ρ и $(N - \rho)$, тогда последнее выражение в (8.10) можно записать как

$$\sum_{j=1}^{N} V_j(t)r(t)dt = (V_1 r_1 + V_2 r_2)dt = V_2(r_2 - r_1(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12})dt.$$

Тогда из равенств (8.9) и (8.10) будет следовать равенство

$$V_2[\mu_2 - r_2 - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}] = 0,$$

которое должно выполняться для любого безрискового портфеля, т. е. для любого ненулевого вектора V_2 из многообразия, задаваемого уравнением (8.8). Из этого следует, что каждая компонента вектора $\mu_2 - r_2 - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}$ должна быть равна нулю. Это требование эквивалентно тому, что для любого j, соответствующего компоненте $V_j(t)$ вектора V_2, имеет место равенство

$$\det\begin{pmatrix} \mu^{(j)}(t) - r(t) & \sigma_{12}^{(j)}(t) \\ \mu_1 - r_1 & \sigma_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu^{(j)}(t) - r(t) - (\mu_1 - r_1)(\sigma_{11})^{-1}\sigma_{12}^{(j)}) \times \det \sigma_{11} = 0,$$

где $\sigma_{12}^{(j)}$ обозначает строку матрицы σ_{12} с номером j. Отсюда следует, что условие отсутствия арбитража выполняется, если матрица

$$\begin{pmatrix} \mu^{(1)}(t) - r(t) & \mu^{(2)}(t) - r(t) & \ldots & \mu^{(N-1)}(t) - r(t) & \mu^{(N)}(t) - r(t) \\ \sigma_1^{(1)}(t) & \sigma_1^{(2)}(t) & \ldots & \sigma_1^{(N-1)}(t) & \sigma_1^{(N)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_\rho^{(1)}(t) & \sigma_\rho^{(2)}(t) & \ldots & \sigma_\rho^{(N-1)}(t) & \sigma_\rho^{(N)}(t) \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

имеет ранг ρ. В свою очередь, это эквивалентно тому, что первая строка матрицы (8.11) является линейной комбинацией остальных ρ строк. Элементы матрицы (8.11) определяются равенствами (8.3), причем $\sigma_k^{(j)}$ является k-й компонентой строки $\sigma^{(j)}(t)$. Отсюда получаем *условие отсутствия арбитража* в окончательном виде:

$$\mu^{(j)}(t) - r(t) = \sum_{k=1}^{\rho}\sigma_k^{(j)}(t)\lambda_k(R, t), \quad 1 \le j \le N. \qquad (8.12)$$

Здесь $\lambda_k(R, t)$, вообще говоря, могут быть любыми функциями, не зависящими от j. Следует заметить, что число слагаемых в правой части (8.12) равно $\rho \le q$, т. е. не обязательно совпадает с числом q независимых стохастических составляющих уравнения (8.1), так как ρ является рангом матрицы (8.5), составленной из строк $\sigma^{(j)}(t)$, определяемых равенством (8.3).

Из вышеприведенного анализа не вытекает никаких рекомендаций относительно задания функций $\lambda_k(R, t)$, поэтому считается, что они должны быть заданы из каких-то других соображений и являются такими же внешними факторами, как функции дрейфа и волатильности в уравнении (8.1). Функцию $\lambda_k(R, t)$ принято называть *рыночной ценой риска*, связанной с влиянием неопределенности, порождаемой стохастической составляющней с номером k.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЦЕНЫ АКТИВА В ОБЩЕЙ МНОГОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

Равенство (8.12) можно рассматривать как уравнение в частных производных для цены актива с датой погашения T_j, если подставить в него явные значения коэффициентов дрейфа $\mu^{(j)}(t)$ и волатильности $\sigma^{(j)}(t)$ из равенств (8.3). Для компактности записи введем ρ-вектор-столбец $\lambda(R, t) = (\lambda_1(R, t)\ \lambda_2(R, t)\ \dots\ \lambda_\rho(R, t))^{\mathrm{T}}$. Тогда равенство (8.12) можно записать в виде (для $\rho = q$)

$$\frac{\partial P^{(T)}}{\partial t} + \frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\mu(R, t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R^2}\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t)\right) - r(t)P =$$

$$= \frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\sigma(R, t)\lambda(R, t). \qquad (8.13)$$

Уравнение (8.13) и является уравнением для определения цены актива с датой погашения T в общей постановке для многофакторной модели. К уравнению (8.13) необходимо добавить также граничное условие $P(R, T, T) = \Psi(T)$, которое определяет платежи в дату погашения (исполнения контракта) и отражает оговоренные ранее условия контракта.

К сожалению, решение уравнения (8.13) в явной форме для общего вида не выписывается. Можно говорить только о решениях в аналитическом виде для некоторых частных случаев. Рассмотрим два из них.

1. Матрица волатильностей $\sigma(R, t)$ не зависит от R, векторные функции $\mu(R, t)$ и $\sigma(R, t)\lambda(R, t)$ – линейные относительно R. В таком случае эти функции задаются соотношениями

$$\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t) = \delta, \quad \mu(R, t) = \mu_0 + \mu_1 R, \quad \sigma(R, t)\lambda(R, t) = \lambda_0 + \lambda_1 R, \quad (8.14)$$

где δ, μ_0, μ_1, λ_0, λ_1 – векторы и матрицы соответствующих размеров, которые в общем случае могут зависеть от времени *t.*

Предположим, что безрисковая процентная ставка $r(t)$ определяется некоторой комбинацией элементов вектора R или является одним из этих элементов. Поэтому введем также M-вектор-строку a такую, чтобы $aR(t) = r(t)$. (Если $r(t)$ является одной из компонент вектора R, то элементы a являются нулями за одним исключением: элемент с номером, который безрисковая процентная ставка $r(t)$ имеет в векторе R, равен единице.) Тогда решением уравнения (8.13) является функция

$$P(R, t, T) = \Psi(T)\exp\{A(t, T) + B(t, T)R\}, \tag{8.15}$$

где скалярная функция $A(t, T)$, M-вектор-строка $B(t, T)$ и симметричная $(M \times M)$-матрица $C(t, T)$ находятся из следующих дифференциальных уравнений (штрих обозначает производную по времени):

$$\begin{gathered} A' = B(\lambda_0 - \mu_0) - B\gamma B^{\mathrm{T}}/2 - \mathrm{tr}(C\gamma), \\ B' = a + B(\lambda_1 - \mu_1) + 2(\lambda_0^{\mathrm{T}} - \mu_0^{\mathrm{T}})C - 2B\gamma C, \\ C' = C(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_1^{\mathrm{T}} - \mu_1^{\mathrm{T}})C - 2C\gamma C \end{gathered} \tag{8.16}$$

с граничными условиями $A(T, T) = 0$, $B(T, T) = 0$ и $C(T, T) = 0$.

2. Как матричная функция $\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t)$, так и векторные функции $\mu(R, t)$ и $\sigma(R, t)\lambda(R, t)$ являются линейными функциями относительно R. То есть

$$\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t) = \delta + R^{\mathrm{D}}\gamma^{\mathrm{D}}, \;\; \mu(R, t) = \beta + \alpha R, \;\; \sigma(R, t)\lambda(R, t) = \eta + \xi R,$$

где α, β, δ, γ, η, ξ – векторы и матрицы соответствующих размеров, которые в общем случае могут зависеть от времени *t.* Символ D обозначает трансформацию вектора в диагональную матрицу, например

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_M \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_M \end{pmatrix}. \tag{8.17}$$

В рассматриваемом случае функция (8.15) также является решением уравнения (8.13), однако в этом случае матрица $C = 0$, скалярная функция $A(t, T)$ и M-вектор $B(t, T)$ находятся из следующих дифференциальных уравнений:

$$A' = B(\eta - \beta) - B\gamma^{D}B^{T}/2, \qquad (8.18)$$

$$B' = a + B(\xi - \alpha) - B\gamma^{D}B^{D}/2 \qquad (8.19)$$

с прежними граничными условиями $A(T, T) = 0$ и $B(T, T) = 0$. Этот случай широко известен для бескупонных облигаций, выплачивающих единицу в дату погашения ($\Psi(T) = 1$) по статьям, посвященным временным структурам для однофакторных моделей с постоянными коэффициентами, когда $M = q = 1$, $a = 1$, функции A и B в (8.18), (8.19) являются скалярными, а параметры α, β, δ, γ, η, ξ превращаются в константы. Явный вид функций $A(t, T)$ и $B(t, T)$, когда все шесть параметров отличаются от нуля, приводится в работе G. Medvedev, J. Cox (1996); решение, когда $\gamma = 0$ и $\xi = 0$, было получено в статье O. Vasiček (1977); в свою очередь, решение для случая $\delta = 0$ и $\eta = 0$ найдено в статье J. Cox, J. Ingerssol, S. Ross (1985). Подробный сравнительный анализ функций $A(t, T)$ и $B(t, T)$, а также вероятностных свойств процессов краткосрочной процентной ставки $r(t)$, опрядeляемых этими моделями, содержится в статье N. Ilieva (2000).

Процедура получения решения уравнения (8.13) в рассмотренных случаях сводится к тому, что сначала должно быть решено уравнение Риккати (матричное уравнение (8.16) для C или векторное уравнение (8.19) для B). К сожалению, в аналитическом виде уравнение Риккати может быть решено только в скалярном случае для постоянных параметров. Для более сложных ситуаций можно получать решение уравнения Риккати только численными методами. Функция A при известных B и C определяется простым интегрированием, которое, однако, может привести к интегралам, не вычисляемым в квадратурах. Ниже рассмотрим еще один случай, когда решение уравнения (8.13) может быть найдено в замкнутой форме для практически важного случая.

§ 4. УСТРАНЕНИЕ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Найденное описанным способом решение уравнения (8.15) определяет «полную» цену актива. Оно будет приемлемо для участников рынка, если все элементы вектора R являются наблюдаемыми. Если ряд элементов этого вектора не наблюдается на рынке (ранее мы их определяли как $M - m$ последних элементов вектора R), то необходимо еще найти распределение вероятностей этих элементов и вычислить условное математическое ожидание решения (8.15) по найденному распределению при фиксированных наблюдаемых переменных состояния. Такая процедура позволит получить формулу для цены, приемлемую для участников рынка.

Рассмотрим эту процедуру для одного важного случая нормального распределения вектора переменных состояния $R(t)$. Это означает, что плотность вероятностей вектора R имеет вид

$$f(R, t) = [(2\pi)^M \det\Sigma]^{-1/2} \exp\{-(R - E)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(R - E)/2\},$$

где $E = E(t)$ – вектор математических ожиданий переменных состояния; $\Sigma = \Sigma(t)$ – матрица их ковариации.

С целью удобства расчленим вектор R на две части: наблюдаемую $G = (R_1\, R_2 \ldots R_m)^{\mathrm{T}}$ и ненаблюдаемую $H = (R_{m+1}\, R_{m+2}\, \ldots\, R_M)^{\mathrm{T}}$. Соответственно этому в блочной форме представим вектор E и матрицу Σ:

$$E = \begin{pmatrix} \Sigma_g \\ \Sigma_h \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_g & \Sigma_{gh} \\ \Sigma_{hg} & \Sigma_h \end{pmatrix},$$

где E_g и E_h – математические ожидания соответственно наблюдаемой и ненаблюдаемой частей; Σ_g и Σ_h – их матрицы ковариаций; Σ_{gh} и Σ_{hg} – матрицы взаимных ковариаций наблюдаемых и ненаблюдаемых частей векторов.

Тогда плотность вероятностей переменных состояния может быть записана в форме

$$f(G, H, t) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} G - E_g \\ H - E_h \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \Sigma_g & \Sigma_{gh} \\ \Sigma_{hg} & \Sigma_h \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G - E_g \\ H - E_h \end{pmatrix}\right\}}{\sqrt{(2\pi)^M \det\begin{pmatrix} \Sigma_g & \Sigma_{gh} \\ \Sigma_{hg} & \Sigma_h \end{pmatrix}}}.$$

Эту плотность вероятностей для наших целей удобно представить в форме произведения безусловной (для G) и условной (для H при фиксированном G) плотностей (см., например, Т. Андерсон, 1963):

$$f(G)\,f(H\,|\,G) \;=\; \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(G-E_g)^{\mathrm{T}}\Sigma_g^{-1}(G-E_g)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^m \det \Sigma_g}} \times$$

$$\times\; \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(H-\overline{E}_h)^{\mathrm{T}}(\Sigma_h-\Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1}\Sigma_{gh})^{-1}(H-\overline{E}_h)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^{M-m}\det(\Sigma_h-\Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1}\Sigma_{gh})}},$$

где для краткости использовано обозначение

$$\overline{E}_h = E_h - \Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1}(G-E_g).$$

В рассматриваемом случае полную цену актива (8.15) можно записать в виде

$$P(G, H, t, T) = \Psi(T)\,\exp\left\{A(t, T) + (B_g B_h)\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}\right\},$$

где вектор B представлен в блочной форме согласно разбиению вектора переменных состояния на части G и H.

Для получения формулы цены актива, которую можно было бы использовать на рынке, остается вычислить условное математическое ожидание функции $P(G, H, t, T)$ по распределению вектора H при фиксированном векторе G. Тогда

$$P(G, t, T) = \Psi(T)\exp\{A(t, T) + B_g G\}\; E_{G,\,t}\,\{\exp\,(B_h H)\} =$$

$$= \Psi(T)\exp\{A(t, T) + B_h(E_h + \Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1}E_g) + B_h(\Sigma_h - \Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1}\Sigma_{gh})B_h^{\mathrm{T}}/2\}\times$$

$$\times \exp\{(B_g + B_h\Sigma_{hg}\Sigma_g^{-1})G\}. \qquad (8.20)$$

Наконец, если наблюдаемые и ненаблюдаемые рыночные показатели являются статистически независимыми между собой (в нашем случае это значит, что $\Sigma_{hg} = 0$ и $\Sigma_{gh} = 0$), тогда получим

$$P(G, t, T) = \Psi(T)\exp\{A(t, T) + B_g G\}\times \exp\{B_h E_h + B_h \Sigma_h B_h^{\mathrm{T}}/2\}. \qquad (8.21)$$

Ненаблюдаемые показатели в формуле (8.21) определяют последний множитель. Этим множителем и отличается полученная формула от известных из литературы формул цены рыночного актива.

Напомним, что вектор G составлен из наблюдаемых рыночных показателей, т. е. $G = (R_1\ R_2\ \ldots\ R_m)^{\mathrm{T}}$. Таким образом, в этой формуле для цены используются или функции, определяемые принятой моделью (когда она допускает нормальное распределение переменных сотояния), или наблюдаемые рыночные показатели $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Поэтому при заданной модели развития рыночных показателей формула (8.21) может использоваться в реальной обстановке.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

В подавляющем большинстве случаев стохастические модели динамики краткосрочной процентной ставки основаны на процессах с независимыми приращениями (диффузионных процессах), которые являются непрерывными недифференцируемыми марковскими процессами и описываются уравнениями вида (8.1), когда вектор переменных состояния $R(t)$ вырождается в единственную переменную $r(t)$. Вместе с тем эмпирические свидетельства говорят о том, что реальные процессы процентных ставок не всегда обладают марковскими свойствами. Эта проблема обсуждалась во многих статьях с разных позиций, что, естественно, требовало новых способов построения моделей динамики краткосрочной процентной ставки. Здесь будем придерживаться модели, предложенной Г. Медведевым (Medvedev, 2000). Идея этой модели основана на предположении, что процесс краткосрочной процентной ставки дифференцируем $(M - 1)$ раз, причем его $(M - 1)$-я производная является диффузионным процессом, удовлетворяющим соответствующему стохастическому дифференциальному уравнению.

Для того чтобы в рассматриваемом случае получить уравнение для определения цены актива, допускающее решение в явной форме, рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение порядка M относительно r с независимой от r волатильностью и непрерывными детерминированными коэффициентами, т. е.

$$dr^{(M-1)}(t) - a_{M-1}(t)r^{(M-1)}(t)dt - \ldots - a_0(t)r(t)dt =$$

$$= b(t)dt + \sigma(t)dW(t), \qquad (8.22)$$

так что непрерывные производные $r^{(k)}(t)$, $0 \le k \le M - 2$, имеют дифференциалы $dr^{(k)}(t) = r^{(k+1)}(t)\,dt$, а производная порядка $(M - 1)$ имеет стохастический дифференциал

$$dr^{(M-1)}(t) = a_{M-1}(t)r^{(M-1)}(t)dt + ... +$$

$$+ a_0(t)r(t)dt + b(t)dt + \sigma(t)dW(t). \qquad (8.23)$$

Заметим, что при $\sigma(t) \equiv 0$ уравнение (8.23) становится однородным обыкновенным дифференциальным уравнением для детерминированной функции, которая имеет M производных:

$$\frac{d^M r}{dt^M} - ... - a_1(t)\frac{dr}{dt} - a_0(t)r(t) = 0. \qquad (8.24)$$

Общее решение уравнения (8.24) можно представить в виде

$$r(t) = \sum_{k=0}^{M-1} u_k(t, s) r^{(k)}(s), \quad s \le t, \qquad (8.25)$$

через значения процесса $r(t) \equiv r^{(0)}(t)$ и производных $r^{(k)}(t)$, $1 \le k \le M-1$, в начальный момент времени s, а также частные решения $u_k(t, s)$, соответствующие специальному набору начальных условий: $r^{(k)}(s) = 1$, $r^{(j)}(s) = 0$ для всех $j \ne k$. Предположим, что $\{r^{(k)}(s), 0 \le k \le M - 1\}$ являются случайными величинами. Тогда функция, определяемая соотношением (8.25), будет иметь непрерывные (в среднеквадратичном) производные $r^{(k)}(t)$ до порядка $(M - 1)$ включительно и является единственным решением однородного стохастического уравнения (8.22) со случайными начальными условиями $\{r^{(k)}(s), 0 \le k \le M-1\}$.

Решение стохастического дифференциального уравнения (8.22) с нулевыми начальными условиями определяется формулой (Ю. Розанов, 1989)

$$r(t) = \int_s^t u(t, s)\sigma(s)dW(s), \quad s \le t, \qquad (8.26)$$

где для любого фиксированного s функция $u(t, s)$ переменной t, $t \ge s$, является решением однородного дифференциального уравнения (8.24) с начальными условиями

$$u(s, s) = 0,\ u^{(1)}(s, s) = 0,\ ...,\ u^{(M-2)}(s, s) = 0,\ u^{(M-1)}(s, s) = 1.$$

Таким образом, если взять решение (8.26) уравнения (8.22) с нулевыми начальными условиями $\{r^{(k)}(s) = 0, 0 \le k \le M - 1\}$ и добавить к нему решение (8.25) однородного уравнения (8.24), тогда полученная сумма даст решение уравнения (8.22) со случайными начальными условиями $\{r^{(k)}(s), 0 \le k \le M-1\}$.

Для использования этого решения при выводе уравнения определения цены актива, допускающего получение формул в явном виде, решение уравнения (8.24) более удобно написать в другой форме. Определим M-вектор переменных состояния R краткосрочной процентной ставки $r(t)$ следующим образом:

$$R_1(t) = r(t), \quad R_{k+1}(t) = \frac{d^k r(t)}{dt^k}, \; 1 \le k \le M-1. \tag{8.27}$$

В этих обозначениях инфинитезимальные приращения первых $(M-1)$ компонент вектора R будут определяться следующим образом:

$$dR_k(t) = R_{k+1}(t)dt, \quad 1 \le k \le M-1, \tag{8.28}$$

а поскольку по предположению последняя компонента $R_M(t) = r^{(M-1)}(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (8.22), формулы (8.24), (8.27), (8.28) позволяют написать вместо уравнения (8.22) следующую систему M дифференциальных уравнений первого порядка (в дифференциалах):

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= R_2(t)dt, \\ &\dots \\ dR_{M-1}(t) &= R_M(t)dt, \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$dR_M(t) = a_{M-1}(t)R_{M-1}(t)dt + \dots + a_0(t)R_1(t)dt + b(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Решение данной системы уравнений удобно представить в матричной форме. Для этого перепишем (8.29) как

$$\begin{pmatrix} dR_1 \\ dR_2 \\ \dots \\ dR_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{M-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_M \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \sigma(t) \end{pmatrix} dW(t).$$

Если теперь для компактности записи громоздких выражений ввести матричные обозначения, то это уравнение запишется в виде

$$dR = \alpha(t)Rdt + \beta(t)dt + \delta(t)dW(t), \qquad (8.30)$$

где использованы обозначения

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \dots \\ R_{M-1}(t) \\ R_M(t) \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sigma(t) \end{pmatrix},$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{M-1}(t) \end{pmatrix}. \qquad (8.31)$$

Это означает, что уравнение (8.30) соответствует уравнению (8.1), в котором $\mu(R, t) = \alpha(t)R + \beta$, $\sigma(R, t) = \delta(t)$, однако среди M-компонент только одна имеет стохастическое поведение. Решение системы (8.30) с начальными условиями

$$\{R_k(s) = r^{(k-1)}(s),\ 1 \le k \le M\}$$

в интегральной форме имеет вид

$$R(t) = U(t, s)R(s) + \int_s^t U(t,\tau)\beta(\tau)d\tau + \int_s^t U(t,\tau)\delta(\tau)dW(\tau), \qquad (8.32)$$

где $U(t, s)$ является фундаментальной матрицей решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $R' = \alpha R$ (R' обозначает производную вектора $R(t)$ по t).

Приведем некоторые полезные свойства фундаментальной матрицы решений

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = \alpha(t)U(t,s), \quad \frac{\partial U(t,s)}{\partial s} = -\,U(t,s)\alpha(s);$$

$$U(t,s) = U(t,\tau)\,U(\tau,s) \quad \text{для любых} \quad t, \tau, s;$$

$$U^{-1}(t,s) = U(s,t), \quad U(t,t) = I, \; I - \text{единичная матрица};$$

$$\det U(t,s) = \exp\int_s^t \operatorname{tr}\alpha(\tau)d\tau.$$

Кроме того, если матрица $\alpha(t) = \alpha$ не зависит от t, тогда матрица $U(t, s)$ зависит только от одной переменной – разности $(t - s) = \tau$, а не от двух переменных. В этом случае имеем $U(t, s) = U(t - s)$, $U(0) = I$, $U(t + s) = U(t)U(s)$, $U^{-1}(\tau) = U(-\tau)$, $\alpha U(\tau) = U(\tau)\alpha$.

Обратимся теперь к решению (8.32). Как и следовало ожидать, ввиду линейности уравнения (8.22) его решение – нормально распределенный случайный процесс с условными (при фиксированном $R(s)$) математическим ожиданием и матрицей ковариации

$$E\{R(t)|R(s)\} = U(t,s)R(s) + \int_s^t U(t,\tau)\beta(\tau)d\tau, \tag{8.33}$$

$$\operatorname{var}\{R(t)|R(s)\} = \int_s^t U(t,\tau)\delta(\tau)\delta^{\mathrm{T}}(\tau)U^{\mathrm{T}}(t,\tau)d\tau. \tag{8.34}$$

На практике интерес представляют процессы, существующие в так называемых установившихся режимах, когда на достаточно большом интервале времени эволюции процесса ни математическое ожидание процесса, ни его ковариации не имеют тенденции к неограниченному увеличению. Иначе говоря, интересны устойчивые процессы. В таком случае интегралы в равенствах (8.33) и (8.34) при $s \to -\infty$ должны существовать. Это будет иметь место, если для всякого t матрица $U(t, s) \to 0$ при $s \to -\infty$. Тогда зависимость от $R(s)$ теряется, и при предельном переходе получаются безусловные математическое ожидание и матрица ковариации, если они существуют:

$$E\{R(t)\} = \int_{-\infty}^t U(t,\tau)\beta(\tau)d\tau, \tag{8.35}$$

$$\mathrm{var}\{R(t)\} = \int_{-\infty}^{t} U(t,\tau)\delta(\tau)\delta^{\mathrm{T}}(\tau)U^{\mathrm{T}}(t,\tau)d\tau. \qquad (8.36)$$

Таким образом, проблема решения уравнения (8.30) превращается в задачу нахождения фундаментальной матрицы решений $U(t, s)$. В общем случае найти эту матрицу не удается. Однако относительно простые решения получаются в том случае, если матрица (8.31) не зависит от t, т. е. коэффициенты уравнения (8.22) являются константами. В таком случае справедлива следующая формула для $U(t, s)$:

$$U(t,s) = U(t-s) = Ve^{\Lambda(t-s)}V^{-1}, \qquad (8.37)$$

где

$$e^{\Lambda(\tau)} = \begin{pmatrix} e^{v_1\tau} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{v_2\tau} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{v_M\tau} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{M-1} & v_2^{M-1} & \dots & v_M^{M-1} \end{pmatrix}. \qquad (8.38)$$

Здесь $\{v_k, 1 \le k \le M\}$ являются собственными числами матрицы α, т. е. корнями уравнения $\det(\alpha - vI) = 0$. Формулы (8.37), (8.38) записаны для наиболее простого случая, когда все собственные числа различны. Заметим, что для существования установившегося режима для процесса в этом случае, т. е. для существования интегралов в (8.35) и (8.36), необходимо, чтобы все собственные числа матрицы α либо были отрицательными, либо имели отрицательные вещественные части (в случае комплексных чисел).

§ 6. ПРИМЕР. ПРОЦЕСС ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ИМЕЕТ ОДНУ ПРОИЗВОДНУЮ

Пусть процесс безрисковой процентной ставки $r(t)$ имеет производную $r'(t)$, которая следует диффузионному процессу

$$dr'(t) = a_1 r'(t)dt + a_0 r(t)dt + bdt + \sigma dW(t), \qquad (8.39)$$

имеющему характеристический полином $v^2 - a_1 v - a_0 = 0$, корни которого имеют вид

$$v_{1,2} = \frac{a_1}{2} \mp \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_0}. \qquad (8.40)$$

В матричной форме уравнение (8.41) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} dr(t) \\ dr'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} dW(t). \qquad (8.41)$$

Из формулы (8.40) следует, что для существования устойчивого процесса безрисковой процентной ставки необходимо, чтобы коэффициенты a_0 и a_1 в уравнении (8.39) были отрицательными. Матрицы V и V^{-1} в (8.37) имеют вид

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{v_2 - v_1} \begin{pmatrix} v_2 & -1 \\ -v_1 & 1 \end{pmatrix},$$

а фундаментальная матрица решений

$$U(\tau) = \frac{1}{v_2 - v_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{v_1 \tau} & 0 \\ 0 & e^{v_2 \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 & -1 \\ -v_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v_2 - v_1} \begin{pmatrix} v_2 e^{v_1 \tau} - v_1 e^{v_2 \tau} & -e^{v_1 \tau} + e^{v_2 \tau} \\ v_1 v_2 (e^{v_1 \tau} - e^{v_2 \tau}) & v_2 e^{v_2 \tau} - v_1 e^{v_1 \tau} \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (8.39) в форме (8.32) получается в виде

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{v_2 - v_1} \begin{pmatrix} v_2 e^{v_1 (t-s)} - v_1 e^{v_2 (t-s)} & -e^{v_1 (t-s)} + e^{v_2 (t-s)} \\ v_1 v_2 (e^{v_1 (t-s)} - e^{v_2 (t-s)}) & v_2 e^{v_2 (t-s)} - v_1 e^{v_1 (t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ r'(s) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{b}{v_2 - v_1} \begin{pmatrix} (1 - e^{v_1 (t-s)}) / v_1 - (1 - e^{v_2 (t-s)}) / v_2 \\ e^{v_2 (t-s)} - e^{v_1 (t-s)} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\sigma}{v_2 - v_1} \int_s^t \begin{pmatrix} -e^{v_1 (t-u)} + e^{v_2 (t-u)} \\ v_2 e^{v_2 (t-u)} - v_1 e^{v_1 (t-u)} \end{pmatrix} dW(u) \qquad (8.42)$$

при начальных условиях $r(s)$ и $r'(s)$ для момента времени s.

Как следует из формул (8.33) и (8.34), первые два слагаемых в (8.42) образуют математическое ожидание $E\left\{ \begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} r(s) \\ r'(s) \end{pmatrix} \right\}$, а ковариационная матрица $\operatorname{var}\left\{\begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} r(s) \\ r'(s) \end{pmatrix}\right\}$ не зависит от $\begin{pmatrix} r(s) \\ r'(s) \end{pmatrix}$ и выражается в форме

$$\operatorname{var}\left\{\begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} \middle| s\right\} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}\{r(t)|s\} & \operatorname{cov}\{r(t),\, r'(t)|s\} \\ \operatorname{cov}\{r(t),\, r'(t)|s\} & \operatorname{var}\{r'(t)|s\} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sigma}{v_2 - v_1}\right)^2 \int_0^{t-s} \begin{pmatrix} -e^{v_1\tau} + e^{v_2\tau} \\ v_2 e^{v_2\tau} - v_1 e^{v_1\tau} \end{pmatrix} [-e^{v_1\tau} + e^{v_2\tau} \quad v_2 e^{v_2\tau} - v_1 e^{v_1\tau}]\, d\tau. \quad (8.43)$$

Явный вид элементов матрицы (8.43) задается следующими равенствами:

$$\operatorname{var}\{r\,(t) \mid s\} =$$

$$= \left(\frac{\sigma}{v_2 - v_1}\right)^2 \left(\frac{-(v_2 - v_1)^2}{2v_1 v_2 (v_1 + v_2)} + \frac{e^{2v_1(t-s)}}{2v_1} + \frac{e^{2v_2(t-s)}}{2v_2} - \frac{2e^{(v_1+v_2)(t-s)}}{v_1 + v_2}\right),$$

$$\operatorname{var}\{r'(t) \mid s\} =$$

$$= \left(\frac{\sigma}{v_2 - v_1}\right)^2 \left(\frac{-(v_2 - v_1)^2}{2(v_1 + v_2)} + \frac{v_1}{2} e^{2v_1(t-s)} + \frac{v_2}{2} e^{2v_2(t-s)} - \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} e^{(v_1+v_2)(t-s)}\right),$$

$$\operatorname{cov}\{r(t),\, r'(t) \mid s\} = \left(\frac{\sigma}{v_2 - v_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{2v_1(t-s)} + \frac{1}{2} e^{2v_2(t-s)} - e^{(v_1+v_2)(t-s)}\right).$$

Заметим, что при $t \to s$ все элементы ковариационной матрицы (8.42) стремятся к нулю, что и следовало ожидать, так как в этом случае при фиксированных $r(s)$ и $r'(s)$ неопределенность состояния исчезает. Формулы для безусловного математического ожидания и безусловной ковариационной матрицы при отрицательных корнях v_1 и v_2 получаются, если в выражениях для этих характеристик перейти к пределу при $s \to \infty$. При этом, если учесть, что корни характеристического уравнения v_1 и v_2 связаны с коэффициентами уравнения (8.39) соотношениями $v_1 v_2 = -a_0$, $v_1 + v_2 = a_1$, $(v_1 - v_2)^2 = a_1^2 + 4a_0$, причем в этом случае по предположению $a_0 < 0$, $a_1 < 0$, то для безусловных математического ожидания и ковариационной матрицы вектора переменных состояния получим следующие выражения:

$$E\left\{\begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} b/|a_0| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{var}\left\{\begin{pmatrix} r(t) \\ r'(t) \end{pmatrix}\right\} = \frac{\sigma^2}{2|a_1|}\begin{pmatrix} 1/|a_0| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8.44)$$

Таким образом, в установившемся режиме процентная ставка $r(t)$ является независимой от своей производной $r'(t)$ (так как их ковариации равны нулю), имеет математическое ожидание $b/|a_0|$ и дисперсию $\sigma^2/|2a_0a_1|$, в то время как производная процентной ставки $r'(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2/|2a_1|$.

В обозначениях формулы (8.20) для этого случая $E_g = b/|a_0|$ и $E_h = 0$, $\Sigma_g = \sigma^2/|2a_0a_1|$, $\Sigma_h = \sigma^2/|2a_1|$ и $\Sigma_{gh} = \Sigma_{hg} = 0$. Когда наблюдаемым показателем является процентная ставка $r(t)$, а ее математическая производная $r'(t)$ не наблюдается, то $G = r$, а $H = r'$. Тогда цена облигации будет выражаться формулой

$$P(G, t, T) = \Psi(T)\exp\{A + r B_g\}\times \exp\{B_h^2\sigma^2/|4a_1|\},$$

где функции A, B_g и B_h подлежат определению и для этого примера будут найдены в следующем параграфе.

§ 7. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЦЕНЫ АКТИВА ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВКАХ

При дифференцируемых краткосрочных процентных ставках их поведение во времени уже не обладает марковскими свойствами, поэтому естественно считать, что «полная» цена актива зависит не только от процентной ставки, но и от ее производных, т. е. от всех компонент вектора R. Формально этот вектор удовлетворяет уравнению (8.30), которое является частным случаем уравнения (8.1). Поэтому уравнение для определения цены актива при процентной ставке, описываемой уравнением (8.1), справедливо и для процентной ставки, описываемой уравнением (8.30). Остается только выяснить, как влияют особенности уравнения (8.30) на вид формулы для цены, если ее можно будет получить в явной форме.

Обратимся к рассмотрению уравнения (8.13) для случая, когда процесс изменения безрисковой краткосрочной процентной ставки описывается уравнением (8.22), а переменными состояния являются сама краткосрочная процентная ставка $r(t)$ и все ее производные $r^{(k)}(t)$, $1 \le k \le M - 1$, которые составляют вектор R. Из соотношений (8.30), (8.31) следует, что в этом случае $q = 1$, а M-векторная функция дрейфа $\mu(R, t)$ и матрица волатильностей (она здесь вырождается в M-вектор) $\sigma(R, t)$ в уравнении (8.1) будут иметь вид

$$\mu(R, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{M-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_{M-1} \\ R_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix},$$

$$\sigma(R, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sigma(t) \end{pmatrix}, \ \sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma^2(t) \end{pmatrix}. \quad (8.45)$$

Отсюда следуют некоторые упрощения уравнения (8.13), которые определяются специфическим видом (8.45) векторов и матриц:

$$\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\mu(R, t) = \sum_{k=1}^{M-1} R_{k+1}\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_k} + \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k(t)R_{k+1}\right)\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_M} + b(t)\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_M},$$

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R^2}\sigma(R, t)\sigma^{\mathrm{T}}(R, t)\right) = \sigma^2(t)\,\frac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R_M^2}, \quad (8.46)$$

$$\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R}\sigma(R,t)\,\lambda(R, t) = \sigma(t)\,\lambda(R, t)\,\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_M}.$$

В правых частях равенств (8.46) все переменные и функции являются скалярными, включая рыночную цену риска $\lambda(R, t)$. Подставляя выражения (8.46) в уравнение (8.13), получаем его в следующей форме (напомним, что в соответствии с нашими обозначениями здесь $r\,(t) = R_1$):

$$\frac{\partial P^{(T)}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{M-1} R_{k+1}\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_k} + \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k(t)R_{k+1} + b(t) - \sigma(t)\lambda(R,\,t)\right)\frac{\partial P^{(T)}}{\partial R_M} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\sigma^2(t)\ \frac{\partial^2 P^{(T)}}{\partial R_M^2} - R_1 P^{(T)} = 0. \qquad (8.47)$$

Для конкретного рассмотрения проблемы решения дифференциального уравнения (8.47) необходимо, чтобы функция $\lambda(R,\,t)$ была определена в явной форме. Как было принято ранее в соотношениях (8.14), предположим, что она линейна относительно вектора R, т. е. $\sigma(R,\,t)\lambda(R,\,t) = \eta + \xi\,R$, $\xi = (\xi_1\ \xi_2\ ...\ \xi_M)$. Таким образом, поскольку в данном случае все предположения (8.14) выполнены, то выражение (8.15) может рассматриваться как решение уравнения (8.47). Тогда уравнения (8.17) и (8.18) для $A(t,\,T)$ и $B(t,\,T) = (B_1\ B_2\ ...\ B_M)$ приобретают следующий вид:

$$A' = (\eta - b)B_M\ - \sigma^2 B_M^2/2, \qquad (8.48)$$

$$B_1' = 1 + (\xi_1 - a_0)B_M,$$

$$B_k' = (\xi_k - a_{k-1})B_M - B_{k-1},\ \ 2 \le k \le M. \qquad (8.49)$$

Таким образом, полная функция цены актива имеет аффинную структуру (относительно R_k) и определяется формулой вида

$$P(R,\,t,\,T) = \exp\{A(t,\,T) + rB_1(t,\,T)\} \times \exp\left\{\sum_{k=2}^{M} B_k(t,\,T)R_k\right\}, \qquad (8.50)$$

где переменные R_k, $2 \le k \le M$, не наблюдаются. Поэтому остается вычислить математическое ожидание (8.50) по ненаблюдаемым переменным. Это приведет к получению окончательной формулы типа (8.21). В расматриваемом случае наблюдается только первая компонента вектора переменных состояния, краткосрочная процентная ставка $r(t)$, а остальными переменными состояния являются ее производные.

Поскольку коэффициенты в уравнениях (8.48) и (8.49) являются константами, функции $A(t,\,T)$ и $B(t,\,T)$ будут зависеть только от одного аргумента $T - t = \tau$, т. е. $A(t, T) = A(T - t) = A(\tau)$ и $B(t, T) = B(T - t) = B(\tau)$. При этом $\partial A/\partial t = -dA/d\tau$, $\partial B/\partial t = -dB/d\tau$. Далее рассмотрим следующий частный случай.

Предположим, что рыночная цена риска является постоянной и не зависит от краткосрочной процентной ставки и ее математических производных. Тогда $\xi = 0$ и уравнения (8.48) и (8.49) вместе со своими начальными условиями составляют систему

$$B_1'(\tau) = a_0 B_M(\tau) - 1,\ \ B_1(0) = 0,$$

$$B_k'(\tau) = B_{k-1}(\tau) + a_{k-1} B_M(\tau),\ \ B_k(0) = 0,\ 2 \le k \le M, \tag{8.51}$$

где матрица системы этих уравнений полностью совпадает с матрицей α, определенной выражением (8.31). Поэтому оказывается, что уравнения (8.51) и (8.30) определены для одной и той же матрицы α, и в этих уравнениях фундаментальные матрицы решений основываются на одних и тех же собственных числах, которые для рассматриваемого случая предполагаются различными и отрицательными (либо имеют отрицательные вещественные части в случае комплексных корней). Так что функции $B_k(\tau)$ полностью определяются и имеют следующие свойства: они равны нулю при $\tau = 0$ и стремятся к некоторому предельному значению при $\tau \to \infty$. Предельные значения функций $B_k(\infty)$ можно просто найти из (8.51), поскольку $B_k'(\infty) = 0$. Так что $B_M(\infty) = 1/a_0$, $B_k(\infty) = -a_k/a_0$, $1 \le k \le M - 1$.

Продолжим теперь рассмотрение примера предыдущего параграфа, в котором $M = 2$. Решение системы (8.51) приводит к выражениям

$$B_1(\tau) = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{v_2 - v_1}\left(\frac{v_2}{v_1} e^{v_1 \tau} - \frac{v_1}{v_2} e^{v_2 \tau}\right),$$

$$B_2(\tau) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{v_2 - v_1}\left(\frac{1}{v_1} e^{v_1 \tau} - \frac{1}{v_2} e^{v_2 \tau}\right), \tag{8.52}$$

где v_1, v_2 – корни характеристического полинома системы (8.51), определяемые выражением (8.40). Функция A вычисляется как интеграл

$$A(\tau) = \int_0^\tau [(\eta - b)B_2(s) + \sigma^2 B_2(s)^2/2]ds. \tag{8.53}$$

Подстановка выражений (8.52) и (8.53) в представление (8.21) с учетом того, что $B_g = B_1$ и $B_h = B_2$, дает окончательную формулу для определения цены облигации в этом примере.

Интересно выяснить, насколько сильно отличается формула для определения цены в рассмотренном случае от соответствующей формулы при обычном анализе. Для этого в качестве примера рассмотрим модель Васичека (1977) и ее модификацию согласно описанному подходу.

§ 8. РАСШИРЕНИЕ МОДЕЛИ ВАСИЧЕКА

В модели Васичека краткосрочная процентная ставка следует процессу, определяемому уравнением

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), \tag{8.54}$$

где $k > 0$, $\theta > 0$, $\sigma > 0$.

Считается, что такой процесс наблюдается, тогда цена дисконтной облигации в момент времени t, если $r(t) = r$, определяется по формуле

$$P_V(r, \tau) = \exp\{A_V(\tau) + rB_V(\tau)\},$$

где

$$A_V(\tau) = \int_0^\tau [(\lambda - k\theta)B_V(s) + \sigma^2 B_V(s)^2/2]ds, \quad B_V(\tau) = (e^{-k\tau} - 1)/k. \tag{8.55}$$

Здесь λ – постоянная рыночная цена риска. Как известно, процесс (8.54) имеет значения установившегося среднего $E[r(\infty)] = \theta$ и установившейся дисперсии var $[r(\infty)] = \sigma^2/2k$.

Теперь построим процесс типа (8.39), который был бы эквивалентен процессу (8.54) в том смысле, что значения установившегося среднего $E[r(\infty)] = \theta$ и установившейся дисперсии var$[r(\infty)] = \sigma^2/2k$ у них были бы одинаковыми. Очевидно, что для этого достаточно положить $a_0 = -k$, $a_1 = -1$, $b = k\theta$. Это приводит к уравнению

$$dr'(t) = [k(\theta - r(t)) - r'(t)]dt + \sigma dW(t). \tag{8.56}$$

Уравнение (8.56) можно рассматривать как расширение модели Васичека на дифференцируемые процессы краткосрочной процентной ставки. Для процесса (8.56) корни (8.40) характеристического полинома имеют вид

$$v_1 = -(1 + \sqrt{1-4k})/2, \quad v_2 = -(1 - \sqrt{1-4k})/2,$$

а функции B_1 и B_2 вычисляются по формулам

$$B_1(\tau) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\left(\frac{v_2}{v_1}e^{v_1\tau} - \frac{v_1}{v_2}e^{v_2\tau}\right),$$

$$B_2(\tau) = -\frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\left(\frac{1}{v_1}e^{v_1\tau} - \frac{1}{v_2}e^{v_2\tau}\right).$$

Полный анализ для произвольных значений параметра k выходит за рамки нашего исследования, поэтому предположим, что этот параметр принимает достаточно малые значения (эмпирические результаты подтверждают такой вывод), и будем считать $k < 0{,}25$.

Для получения аналитических результатов при сравнении с моделью Васичека рассмотрим аппроксимацию функций B_1 и B_2, основывающуюся на малости параметра k. Заметим, что при $k < 0{,}25$ имеет место аппроксимация $\sqrt{1-4k} = 1 - 2k + O(k^2)$, так что

$$v_1 = -1 + k + O(k^2), \quad v_2 = -k + O(k^2),$$

для функций B_1 и B_2 получаем

$$B_1(\tau) = -\frac{1}{k} - ke^{(k-1)\tau} + \left(\frac{1}{k} + k\right)e^{-k\tau} + O(k^2),$$

$$B_2(\tau) = -\frac{1}{k} - (1+3k)e^{(k-1)\tau} + \left(\frac{1}{k} + 1 + 3k\right)e^{-k\tau} + O(k^2).$$

Сравнивая эти функции с функцией (8.55), можно записать

$$B_1(\tau) = B_V(\tau) + k[e^{-k\tau} - e^{(k-1)\tau}] + O(k^2) = B_V(\tau) + \varepsilon_1(\tau),$$

$$B_2(\tau) = B_V(\tau) + (1+3k)[e^{-k\tau} - e^{(k-1)\tau}] + O(k^2) = B_V(\tau) + \varepsilon_2(\tau),$$

где функции $\varepsilon_1(\tau)$ и $\varepsilon_2(\tau)$ могут рассматриваться как некоторые поправки, показывающие отличие функций $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ от функции $B_V(\tau)$. Эти поправки являются неотрицательными и такими, что величины $\varepsilon_{1,2}(0) = \varepsilon_{1,2}(\infty) = 0$. Они ограничены сверху значениями

$$\max_\tau \varepsilon_1(\tau) < k + O(k^2), \qquad \max_\tau \varepsilon_2(\tau) < 1 + k + O(k^2).$$

Таким образом, цена облигации в модели Васичека вычисляется по формуле

$$P_{\mathrm{V}}(r,\tau) = \exp\{rB_{\mathrm{V}}(\tau) + \int_0^\tau [(\lambda - k\theta)B_{\mathrm{V}}(s) + \sigma^2 B_{\mathrm{V}}(s)^2/2]ds\},$$

где $B_{\mathrm{V}}(\tau) < 0$ определена в (8.56), в то время как в рассматриваемой модифицированной модели она вычисляется по формуле

$$P(r,\tau) = P_{\mathrm{V}}(r,\tau) \times$$

$$\times \exp\left\{ r\varepsilon_1(\tau) + \frac{\sigma^2}{4k}B_2^2(\tau) + \int_0^\tau \left(k\theta - \lambda + \frac{\sigma^2}{2}(2B_{\mathrm{V}}(s) + \varepsilon_2(s)) \right)\varepsilon_2(s)ds \right\}.$$

Последний сомножитель отражает влияние модификации модели на цену облигации, т. е. влияние того, что стохастический процесс краткосрочной ставки не является марковским, а является процессом, имеющим первую математическую производную. Следует ожидать, что первое слагаемое в показателе не будет играть существенной роли, а основной вклад, в отличие модифицированной формулы от традиционной, будут играть два других слагаемых показателя. Поскольку они могут иметь разные знаки, влияние этого сомножителя подлежит внимательному исследованию.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Back K. Yield Curve Models: A Mathematical Review // Option Embedded Bonds. Irwing Publishing, 1996. P. 1–34.

Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices // Econometrica. 1985. Vol. 53. No. 2. P. 363–384.

Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rate // Econometrica. 1985. Vol. 53. No. 2. P. 385–407.

Duffie D., Kan R. A Yield-Factor Model of Interest Rates // Mathematical Finance. 1996. Vol. 6. No. 4. P. 373–403.

Gerber H. U., Pafumi G. Utility Functions: from Risk Theory to Finance // North American Actuarial Journal. 1998. Vol. 2. No 3. P. 74–100.

Ilieva N. G. The Comparative Analysis of the Term Structure Models of the Affine Yield Class // Proceedings of 10-th Intern. AFIR Symposium. Tromso, 2000. P. 367–393.

Ilieva N. G. On Some Yield Interest Rate Models of the Affine Class Term Structures // EURO Working Group on Financial Modelling. 26-th Meeting. Trondheim, 2000. P. 1–19.

Medvedev G. A. The Explicit Form of No Arbitrage Condition When the Term Structure Model is Multi-Factor // Proceedings of the 26-th Meeting EURO Working Group on Financial Modeling. Trondheim, 2000. P. 20–38.

Medvedev G. The Asset Pricing When the Interest Rates Are Differentiable Stochastic Processes // Proceedings of the 11-th AFIR Colloquium. Toronto, 2001. P. 517–536.

Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков: В 2 ч. Ч. 1: Риски из-за неопределенности процентных ставок. Мн.: БГУ, 1999.

Медведев Г. А. Математические основы финансовой экономики: В 2 ч. Ч. 1: Мартингальный подход. Мн.: БГУ, 2003.

Дополнительная

Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5. № 3. С. 314–330.

Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1972.

Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.

Терпугов А. Ф. Математика рынка ценных бумаг. Томск: Изд-во ТГПУ, 2000.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1967.

Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. Т. 1: Факты. Модели. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998.

Arnold L. Stochastic differential equations. New York: John Wiley, 1973.

Arrow K. J. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing // Review of Economic Studies. 1964. Vol. 31. P. 91–96.

Artzner P., Delbaen F. Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach // Advances in Applied Mathematics. 1989. Vol. 10. P. 95–129.

Black F., Derman E., Toy W. A One-Factor Model of Interest Rate Contingent Claim Pricing Equation // Financial Analyst Journal. 1990. P. 33–39.

Black F., Karasinsky P. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal // Financial Analysis Journal. 1991. P. 52–59.

Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–654.

Bodie Z., Kane A., Marcus A. Investment. Chicago: Irwin, 1996.

Borch K. The Mathematical Theory of Insurance. Lexington: Lexington Books, 1974.

Brennan M. J., Schwartz E. S. Saving Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 4. P. 67–88.

Brennan M. J., Schwartz E. S. A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds // Journal of Banking and Finance. 1979. Vol. 3. P. 133–155.

Brown R. H., Schaefer S. M. Interest rate volatility and the term structure // Working paper, London Business School. London, 1991.

Brown R. H., Schaefer S. M. Interest Rate Volatility and the Shape of the Term Structure // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1994. Vol. A 347. P. 563–576.

Bühlmann H. Economic Premium Principle // ASTIN Bulletin. 1980. Vol. 11. P. 52–60.

Bühlmann H. The General Economic Premium Principle // ASTIN Bulletin. 1984. Vol. 14. P. 13–21.

Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. B. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate // Journal of Finance. 1992. Vol. 47. P. 1209–1227.

Chen L. Three-Factor Model of Term Structure // Working paper, Federal Reserve Board. Washington, 1993.

Chen R.-R., Scott L. Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor CIR Model of the Term Structure // Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5. P. 613–636.

Constantinides G. A Theory of the Nominal Structure of Interest Rates // Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5. P. 531–552.

Cox J. C., Ross S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes // Journal of Financial Economics. 1976. Vol. 3. P. 145–166.

Culbertson J. M. The Term Structure of Interest Rates // Quartely Journal of Economics. 1957. Vol. 71. P. 485–517.

Das S. Jump-Diffusion Processes and the Bond Markets // Working paper. Harvard Business School, 1993.
Debrue G. The Theory of Value. New York: John Wiley, 1959.
Dothan L. U. On the Term Structure of Interest Rates // Journal of Financial Economics. 1978. Vol. 6. P. 59–69.
Duffie D. Dynamic Asset Pricing. Princeton: Princeton University Press, 1992.
Dybvig P. H. Bond and Option Pricing Based on the Current Term Structure // Working paper. Washington University, St. Louis, Missouri, 1989.
El Karoui N., Rochet J.-C. A Pricing Formula for Options on Coupon Bonds // Working paper. Universite de Paris 6, 1989.
El Karoui N. et al. The Valuation and Hedging of Contingent Claims with Markowian Interest Rates // Working paper. Universite de Paris 6, 1991.
Feller W. Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. No. 1. P. 173–182.
Fleming W. H., Rishel R. W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. New York: Springer-Verlag, 1975.
Fong H. G., Vasiček O. A. Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor // Working paper. Gifford Fong Associates, 1991.
Frachot A., Janci D., Lacoste V. Factor Analysis of the Term Structure: A Probabilistic Approach // Working paper. Banque de France, 1992.
German M. B. A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion Processes // Working paper No. 50. University of California, Berkeley, 1977.
Harrison J. M., Kreps D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets // Journal of Economic Theory. 1979. Vol. 20. P. 381–408.
Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // Stochastic Processes and Applications. 1981. Vol. 11. P. 215–260.
Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: New Methodology for Contingent Claims Valuation // Econometrica. 1992. Vol. 60. P. 77–105.
Heston S. Testing Continuous Time Model of the Term Structure of Interest Rates // Working paper. Yale University, 1991.
Hicks J. R. Value and Capital. London: Oxford University Press, 1946.
Ho T. S. Y., Lee S.-B. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // Journal of Finance. 1986. Vol. 41. P. 1011–1029.
Hull J., White A. Pricing Interest-Rate Derivative Securities // The Review of Financial Studies. 1990. Vol. 3. P. 573–592.
Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and Diffusion Processes. Amsterdam: North-Holland, 1981.
Jamshidian F. An Exact Bond Option Formula // Journal of Finance. 1989. Vol. 44. P. 205–209.
Langetieg T. A Multivariate Model of the Term Structure of Interest Rates // Journal of Finance. 1980. Vol. 35. P. 71–97.
Longstaff F. A., Schwartz E. S. Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model // Journal of Finance. 1992. Vol. 47. P. 1259–1282.

Lucas R. E. Asset Prices in an Exchange Economy // Econometrica. 1978. Vol. 46. P. 1426–1446.
Medvedev G. A., Cox S. H. The market price of risk for affine interest rate term structures // Proc. of the 6-th Intern. AFIR Symposium. Nuremberg, 1996. P. 913–924.
Merton R. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. P. 141–183.
Merton R. Continuous-Time Finance. Oxford: Blackwell, 1990.
Modigliani F., Sutch R. Innovations in Interest Rate Policy // American Economic Review. 1966. Vol. 56. P. 178–197.
Oksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
Panjer H. et al. Financial Economics. Schaumburg: The Actuarial Foundation, 1998.
Pearson N. D., Sun T.-S. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll and Ross Model // Journal of Finance. 1994. Vol. 49. P. 1279–1304.
Pennachi G. Identifying the Dynamics of Real Interest Rates and Inflation: Evidence Using Survey Data // The Review of Financial Studies. 1991. Vol. 4. P. 53–86.
Pye G. Lifetime Portfolio Selection in Continuous Time for a Multiplicative Class of Utility Functions // American Economic Review. 1973. Vol. 63. P. 1013–1016.
Richard S. F. An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates // Journal of Financial Economics. 1978. Vol. 6. P. 33–57.
Ritchken P., Sankarasubramanian L. Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamycs of the Term Structure // Mathematical Finance. 1995. Vol. 5. P. 55–72.
Rogers L. C. G. Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use? // Mathematical Finance / Ed. M. Davis et al. New York: Springer-Verlag, 1995. P. 93–115.
Roll R. The Behavior of Interest Rates. New York: Basic Books, Inc. 1970.
Sandmann K., Sondermann D. On the Stability of Lognormal Interest Rate Models // Working paper B-293. Universitat Bonn, 1993.
Schlögl E., Sommer D. Factor Models and the Shape of the Term Structure // Working paper No. B-395, University of Bonn, Department of Statistics, 1997.
Strickland C. A Comparison of Diffusion Models of the Term Structure // The European Journal of Finance. 1996. Vol. 2. P. 103–123.
Vasiček O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН АКТИВОВ, КОГДА ПРОЦЕССЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК ЯВЛЯЮТСЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ

Учебное издание

Медведев Геннадий Алексеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ ЭКОНОМИКИ

В двух частях

Часть 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЫНОЧНОЙ СТОИМОСТИ ЦЕННЫХ БУМАГ

Редактор *Л. В. Рутковская*
Художник обложки *Л. А. Стрижак*
Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Г. М. Добыш*
Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*

Подписано в печать 15.07.2002. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,20. Уч.-изд. л. 18,0. Тираж 250 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия ЛВ № 315 от 14.07.98.
220050, Минск, проспект Франциска Скорины, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия ЛП № 461 от 14.08.2001.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.